Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами

***Равчеев Андрей Валерьевич***
*Аспирант*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
*E-mail: rav4eev@mail.ru*

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. Обозначим показатели Ляпунова системы (1) через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а их спектр — через $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$. Поскольку мы не предполагаем коэффициенты рассматриваемых систем ограниченными, их показатели Ляпунова являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которая наделяется порядковой топологией.

Для данных метрического пространства $M$ и функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ рассмотрим класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| e^{\theta(t)t} < \infty$;
2) для всяких $k = \overline{1,n}$, $\mu \in M$, выполняется неравенство

$$\lambda_k(A(\cdot) + Q(\cdot,\mu)) \geqslant \lambda_k(A).$$

Отметим, что для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс $\mathcal{Q}_n^\theta[A](M)$ не пуст, поскольку ему заведомо принадлежит матрица $Q \equiv 0$.

Ставится задача полного дескриптивно-множественного описания для каждых $n \geqslant 2$ и метрического пространства $M$ класса

$$\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M) = \big\{ \big(\Lambda(A), \Lambda(A+Q)\big) \mid A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n,\, Q \in \mathcal{Q}_n^\theta[A](M) \big\}.$$

Указанную задачу можно рассматривать как обобщение примера Перрона [1, § 1.4] на случай неограниченных коэффициентов.

Будем говорить [2, с. 224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r, +\infty]\big)$ луча $[r, +\infty]$ является $G_\delta$-множеством метрического пространства $M$. В частности, класс $({}^*, G_\delta)$ — подкласс второго класса Бэра [2, с. 248].

Решение поставленной задачи содержит следующая

**Теорема.** *Для каждых метрического пространства $M$, натурального числа $n \geqslant 2$ и непрерывной функции $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ пара $\big(l, f\big)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon M \to \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^n$, принадлежит классу $\Pi\mathcal{Q}_n^\theta(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

*1)* $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_n$;

*2)* $f_1(\mu) \leqslant \ldots \leqslant f_n(\mu)$ *для любого* $\mu \in M$;

*3)* $f_i(\mu) \geqslant l_i$ *для всех* $\mu \in M$ *и* $i = \overline{1,n}$;

*4) для любого* $i = \overline{1,n}$ *функция* $f_i(\cdot)\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ *принадлежит классу* $({}^*, G_\delta)$.

**Замечание.** Аналог этой теоремы для случая систем с ограниченными коэффициентам установлен в работе [3].

Приведённая теорема показывает, что все теоретически возможные пары спектров исходной и параметрически возмущённой систем (при дополнительном условии, что все показатели возмущённой системы не меньше, чем у исходной) можно получить в классе возмущений, убывающих быстрее всякой экспоненты. Эта ситуация является специфичной для класса систем с неограниченными коэффициентами, т.к. показатели Ляпунова систем с ограниченными коэффициентами инвариантны относительно возмущений, убывающих быстрее любой экспоненты [1, § 8.1].

### Источники и литература

1) *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

2) *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

3) *Барабанов Е.А., Быков В.В.* Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности. Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 31–43.