Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О существовании дифференциальной системы, обладающей ляпуновской глобальной неустойчивостью, но перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью

Научный руководитель – Сергеев Игорь Николаевич

Бондарев Алексей Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: albondarev1998@yandex.ru

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [4] понятию качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, *устойчивости по Перрону*. Он является продолжением цикла работ автора [1–3], усиливая их результаты:

1) работа [1] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 [5], но построенная в ней система обладала *ограниченным* на всей полуоси времени (хотя и ненулевым) линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [2] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [3] этот результат был ещё более усилен тем, что построенная в ней система обладала как *перроновской*, так и *верхнепредельной полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*) и одновременно с этим даже *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех примеров, рассмотренных выше).

Нижеследующее усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей ляпуновской глобальной неустойчивостью, но при этом как *перроновской*, так и *верхнепредельной глобальной устойчивостью*.

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ рассматриваем дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}}, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \qquad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и допускают *нулевое* решение.

Теорема. При $n = 2$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и обладающая следующими двумя свойствами:

• для всех решений x системы (1) справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0;$$

• для каждого ненулевого решения x системы (1) существует такой момент $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|x(t_0)| > 1.$$

Таким образом, все решения описанной системы при $t \to +\infty$ стремятся по норме к нулю, но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает 1-окрестность начала координат.

Заметим, что полученный результат не распространяется на *автономные* системы, для которых свойства глобальной неустойчивости сразу всех перечисленных типов (и перроновского, и верхнепредельного, и ляпуновского), согласно теореме 5 из работы [6], *неразличимы*.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 21-8-2-4-1).

Источники и литература

1) Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 899.
2) Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
3) Бондарев А.А. Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 858–859.
4) Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 6. С. 855–856.
5) Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 636–646.
6) Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56, № 2. С. 63–78.