Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О регуляризующих факторах для уравнений холодной плазмы

Делова Мария Игоревна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: mashadelova@yandex.ru

Рассмотрим систему уравнений, возникающую при описании плоских одномерных электростатических верхнегибридных релятивистских плазменных колебаний с учетом электронных соударений.

$$\frac{\partial V_1}{\partial} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial\rho} = -E_1 - B_0V_2 - \nu V_1,\ \frac{\partial V_2}{\partial\theta} + V_1\frac{\partial V_2}{\partial\rho} = B_0V_1 - \nu V_2,\ \frac{\partial E_1}{\partial\theta} + V_1\frac{\partial E_1}{\partial\theta} = V_1. \quad (1)$$

Здесь функции $V_1(\rho,\theta)$, $V_2(\rho,\theta)$, $E_1(\rho,\theta)$, $\rho\in\mathbb{R}$, $\theta\in\mathbb{R}_+$, имеют смысл компонент скорости электронов и напряженности электрического поля, $n(\theta,\rho) = 1 - \dfrac{\partial E_1}{\partial\rho}$ – плотность, ν – коэффициент интенсивности электронных соударений, B_0 - напряженность магнитного поля.

В теории холодной плазмы важно найти условия на начальные данные, при которых решение потеряет гладкость в течение конечного времени, так как после этого времени модель становится неприменимой. Рассмотрим задачу Коши

$$(V_1,V_2,E_1)(\rho,0) = (V_1^0,V_2^0,E_1^0)(\rho)\in C^2(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Задача (1), (2) при $\nu = \mathrm{const}$, $\mathrm{B}_0 = 0$ и $\nu = 0$, $B_0 = \mathrm{const}$ исследовалась в [1], [2], где были найдены критерии потери гладкости в терминах начальных данных. В настоящей работе решается аналогичная задача при $\nu = \mathrm{const}$, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{const}$.

Обозначим $q_1 = (V_1)_\rho$, $q_2 = (V_2)_\rho$, $s = (E_1)_\rho$. Данные величины вдоль характеристики, стартующей из точки ρ_0, подчиняются системе уравнений

$$\frac{dq_1}{d\theta} = -q_1^2 - s - B_0q_2 - \nu q_1, \quad \frac{dq_2}{\partial\theta} = -q_1q_2 + B_0q_1 - \nu q_2, \quad \frac{ds}{d\theta} = q_1(1-s). \quad (3)$$

Данная система может быть сведена к матричному уравнению Риккати, что позволяет произвести ее линеаризацию. Решение системы (3) имеет вид $W(\theta) = \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$, где $W = (q_1,q_2,s)^T$,а $Q(\theta) = Q(\theta,\rho_0)$ — скалярная функция, представляющая сумму экспонент с коэффициентами, зависящими от начальных данных q_1^0, q_2^0,s^0 и параметров B_0, ν. Критерий образования особенности решения задачи Коши имеет вид:

Теорема. *Если начальные данные (2) таковы, что* $\inf\limits_{\theta>0} Q(\theta,\rho_0) > 0$ *при всех* $\rho_0\in\mathbb{R}$, *то классическое решение задачи (1),(2) существует при всех* $\theta > 0$. *В противном случае в течение некоторого конечного времени производные решения задачи (1),(2) обращаются в бесконечность.*

Практическое использование данной теоремы затруднительно в силу зависимости от пяти произвольных параметров. Однако при фиксированных начальных данных можно построить область параметров на плоскости (ν, B_0), соответствующую глобально гладкому решению.

Из структуры функции $Q(\theta)$ следует , что существует конечное пороговое значение интенсивности магнитного поля $\bar{B}$ такое, что при каждом B_0, 0

Источники и литература

1) Rozanova O., Chizhonkov E., Delova M. *Exact thresholds in the dynamics of cold plasma with electron-ion collisions.* // AIP Conference Proceedings, (2020) 2302, No. 1, 060012.
2) Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 72(2021),1.