Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике

Научный руководитель – Власов Виктор Валентинович

Панкратова Елена Виталиевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия
E-mail: epankratova213@gmail.com

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H оператор-функцию $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda \hat{Q}(\lambda) - \hat{K}(\lambda) A^2 + A^2$, где A - линейный оператор, действующий в H, $A: Dom(A) \to H$ - самосопряженный, положительно определенный, обратный к которому компактен. Скалярные функции $\hat{Q}(\lambda)$ и $\hat{K}(\lambda)$ допускают представления $\hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda+\gamma_k}$, $\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda+\gamma_k}$. При этом числа c_k, d_k, γ_k $(k \in \mathbb{N})$ положительны, а последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает к $+\infty$.
Исследуемая оператор-функция возникает в результате применения оператора Лапласа к операторной модели уравнения Гуртина-Пипкина [1], применяемого в теории теплопроводности.
Будем предполагать, что выполняется
Условие А. Пусть коэффициенты c_k, d_k и числа γ_k $(k \in \mathbb{N})$ допускают следующие представления: $c_k = Ak^{-\alpha} + O(k^{-\alpha-1})$, $d_k = Ek^{-\mu} + O(k^{-\mu-1})$, $\gamma_k = Bk^{\beta} + O\left(k^{\beta-1}\right)$ при $k \to \infty$, где $A > 0,\ B > 0,\ E > 0,\ 0 < \alpha \le 1,\ 0 < \mu \le 1,\ \alpha + \beta > 1$, $\mu + \beta > 1$ и выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\gamma_k} < 1$.
Обозначим $r := \dfrac{\alpha + \beta - 1}{\beta}$.
Из приведенных выше неравенств для чисел α и β следует, что $r \in (0;1]$.
Основной результат работы содержит

Теорема 1. *Пусть выполнено условие А и $M = \max\{m \in \mathbb{N} :\ rm < 1\}$. Тогда невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с множеством $\left\{\overline{\bigcup \lambda_n^{\pm}}\right\}$, где числа $\lambda_n^{\pm}$ комплексно сопряжены, т.е. $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, и асимптотически представимы в виде*

$$\lambda_n^{+} = ia_n + a_n \sum_{k=1}^{M} t_k + O(1),\ \text{если } 0 < r < 1 \tag{1}$$

$$\lambda_n^{+} = ia_n - \frac{1}{2}\frac{A}{\beta} \ln a_n + O(1),\ \text{если } r = 1 \tag{2}$$

при $n \to \infty$, где $t_k = O(1/a_n^{rk})$

Представленное исследование опирается на работу [2], где был рассмотрен случай $Q \equiv 0$.
Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ «Математические методы анализа сложных систем», а также Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Источники и литература

1) *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* «A General theory of heat conduction with finite wave speeds»//Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V.31. P. 113-126
2) *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений: Монография.