Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Аналитические свойства обобщенных мер

Научный руководитель – Шамаров Николай Николаевич

Шелаков Михаил Григорьевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: shelakov.mikhail@mail.ru

[12pt]article [utf8]inputenc [english, russian]babel amsfonts deffОпределение[section] remarkЗамечание[section] prepПредложение[section] theoremТеорема[section]

1. Введение

Мы будем следовать терминологии книги [**?**].

Пусть E - векторное пространство, G - некоторое пространство линейных функционалов на E, разделяющее точки. Алгебру, образованную $G-$цилиндрическими множествами будем обозначать символом $\mathfrak{A}(E, G)$.

Помимо ограниченных в полной вариации цилиндрических мер мы будем рассматривать и такие цилиндрические меры, которые неограничены в полной вариации. но конечны на каждом множестве.

В книге [**?**] преобразование Фурье определяется только для ограниченных в полной вариации цилиндрических мер. Легко понять, что для неограниченных в полной вариации цилиндрических мер его также можно определить. Кроме того, для этих мер остаётся в силе теорема о том, что две цилиндрические меры равны тогда и только тогда, когда равны их преобразования Фурье.

Всюду далее мы будем рассматривать этот общий случай цилиндрических мер.

2. Цилиндрические производные

$G-$цилиндрическая мера μ называется дифференцируемой по Фомину по направлению $h \in E$, если существует такая $G-$цилиндрическая мера μ'_h, что $\forall$ $G-$цилиндрического множества A $\exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{\mu(A+th)-\mu(A)}{t} = \mu'_h(A)$. В этом случае μ'_h называется цилиндрической производной меры μ по направлению h.

Стоит отметить, что существование указанного конечного предела для любого цилиндрического множества A влечёт существование функции $\mu'_h(A)$, счётно-аддитивной на каждой $\sigma-$подалгебре алгебры $\mathfrak{A}(E, G)$, полученной как полный прообраз борелевской $\sigma-$алгебры некоторого пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении вида $x \longrightarrow (g_1(x), ..., g_n(x)), g_i \in G$ (такую σ-алгебру обозначают символом $\mathfrak{A}_{g_1,...,g_n}$). Это напрямую вытекает из замечания, сделанного в начале статьи [**?**]. Таким образом, μ'_h автоматически является цилиндрической мерой.

Используя это определение, можно доказать, что существует неограниченные в полной вариации цилиндрические меры.

Пример. Пусть B - самосопряжённый положительноопределённый оператор Гильберта-Шмидта в гильбертовом простанстве H. Пусть μ - гауссовская цилиндрическая мера с корреляционным оператором B. Тогда $\forall h \in H \ \exists \ \mu'_h$, причём $\exists h \in H$ такой, что μ'_h не ограничена в полной вариации.

Тот факт, что $\forall h \in H \ \exists \ \mu'_h$ вытекает из аналогичного утверждения для конечномерных гауссовских мер и теоремы о замене переменной.

Покажем, что существуют производные цилиндрических гауссовских мер, не ограниченные по вариации.

Пусть e_n - базис, т.е. полная ортонормированная система, H, состоящий из собственных векторов оператора B, т.е. $Be_n = \beta_n e_n$, причём $\beta_n > 0$ и $\beta_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow 0$. Введём цилиндрические множества $A_n = \{x \in H : (x, e_n) \geq 0\}$. Тогда произвольный вестор $h \in H$ можно представить в виде ряда $h = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n$.

Так как образ меры μ относительно ортогонального проектирования пространства H на одномерное подпространство, порождённое вектором e_n задаётся плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n}}$, то мы имеем следующую цепочку равенств $\mu'_h(A_n) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{\mu(A_n + th) - \mu(A_n)}{t} = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_{t\alpha_n}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\beta_n}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{t}$

$\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(y+t\alpha_n)^2}{2\beta_n}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\beta_n}} dy}{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\frac{(y+t\alpha_n)^2}{2\beta_n}})' dy =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \int\limits_0^{+\infty} (e^{-\frac{(y+t\alpha_n)^2}{2\beta_n}})'|_{t=0} dy = -\frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi\beta_n}\beta_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\beta_n}} y dy = -\frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi}\beta_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u du = \frac{\alpha_n}{\beta_n} K$, где K - ненулевое число, не зависящее от n.

Заметим, что $(\alpha_n) \in l^2$, а $\frac{1}{\beta_n} \longrightarrow \infty$, а значит $(\frac{1}{\beta_n}) \notin l^2$. Если бы $\forall h \in H$ цилиндрическая мера μ'_h была бы ограничена по вариации, то $\forall (\alpha_n) \in l^2$ последовательность $(\frac{\alpha_n}{\beta_n})$ была бы ограничена.

Зададим оператор $\widehat{B} : l^\infty \longrightarrow l^2$ формулой: $\forall x \in l^\infty, x = (x_n), \widehat{B}x = (\beta_n x_n)$. В силу того, что $\forall (\alpha_n) \in l^2$ последовательность $(\frac{\alpha_n}{\beta_n})$ ограничена, оператор $\widehat{B}$ является биекцией. Легко понять, что он непрерывен. Значит по теореме об обратном операторе $\widehat{B}^{-1}$ также должен быть непрерывным, но в силу того, что $\frac{1}{\beta_n} \longrightarrow \infty$ это, очевидно, неверно.

Основные свойства преобразования Фурье верны и для цилиндрических мер, как показывает следующее предложение.

Предположим, что μ обладает цилиндрической производной μ'_h по направлению $h \in E$ и для каждого линейного функционала $g \in G$ мера μg^{-1} обладает непрерывно дифференцируемой и интегрируемой вместе со своей производной плотностью. Тогда справедливо равенство $\widetilde{\mu'_h}(g) = -ig(h)\widetilde{\mu}(g)$.

Доказательство.

Из определения производной по направлению получаем $(\mu'_h g^{-1})(A) = \mu'_h(g^{-1}(A)) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\mu(g^{-1}(A) + th) - \mu(g^{-1}(A))}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\mu(g^{-1}(A + tg(h))) - \mu(g^{-1}(A))}{t} = g(h)(\mu g^{-1})'(A)$.

Пусть ρ - плотность меры μg^{-1}, тогда из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем, ρ' - плотность меры $(\mu g^{-1})'$.

По формуле замены переменной $\widetilde{\mu'_h}(g) = \int\limits_E e^{ig(x)} \mu'_h(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iv} (\mu'_h g^{-1})(dv) = g(h) \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iv} (\mu g^{-1})'(d$

$g(h)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iv}\rho' dv$. По одному из основных свойств преобразования Фурье последний интеграл равен $-g(h)\int\limits_{\mathbb{R}}(e^{iv})'\rho dv = -ig(h)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{iv}\rho dv = -ig(h)\int\limits_{E} e^{ig(x)}\mu(dx) = -ig(h)\widetilde{\mu}(g)$. Равенство доказано. $\square$

3. Интегрирование цилиндрических функций

Дадим очень важное определение функции, интегрируемой по цилиндрической мере.

Пусть μ - $G-$цилиндрическая мера на E.

Пусть f - цилиндрическая функция на E, т.е. существует такое непрерывное линейное отображение $P : E \longrightarrow \mathbb{R}^n = PE$ в топологии $\sigma(E, G)$, т.е. $P(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$, где $g_i \in G$, и такая борелевская функция φ на PE, что $f(x) = \varphi(P(x))\forall x \in E$. Для удобства будем предполагать, что все g_i линейно независимы.

Сначала дадим определение интеграла от f по цилиндрическому множеству C. Если $C \in P^{-1}(\mathcal{B}(PE)) = \mathfrak{A}_{g_1,..,g_n}$, то определение дать легко, $\int\limits_C f\mu(dx) = \int\limits_{P(C)} \varphi\ \mu P^{-1}(dx)$. В случае $C \notin P^{-1}(\mathcal{B}(PE))$ приходится использовать более сложную конструкцию.

Пусть $Q = (l_1, l_2, ..., l_m), l_i \in G$, - отображение E в $\mathbb{R}^m = QE$, B борелевское подмножество QE, такие, что $C = Q^{-1}(B)$. Предположим, как и ранее, что все l_i линейно независимы.

Пусть $h_1, ..., h_k$ - базис пространства $< l_1, ..., l_m, g_1, ..., g_n >$. Введём отображение $L : E \longrightarrow \mathbb{R}^k = LE, L(x) = (h_1(x), h_2(x), ..., h_k(x))$. Очевидно, существуют такие линейные отображения P_1, Q_1 в LE, что $P = P_1 \circ L, Q = Q_1 \circ L$. Определим функцию $\varphi_{_{LE}}(y) = \varphi(P_1(y))\forall y \in LE$ и множество $B_{LE} = Q_1^{-1}(B)$. Если функция $\varphi_{_{LE}}$ интегрируема по измеримому пространству B_{LE} с сужением борелевской σ - алгебры LE на B_{LE} по мере μL^{-1}, то мы говорим, что $\exists\int\limits_C f\mu(dx) = \int\limits_{B_{LE}} \varphi_{_{LE}}\ \mu L^{-1}(dx)$.

Несложно понять, что благодаря теореме о замене переменной и свойству согласованности конечномерных проекций меры μ, данное определение интеграла не зависит от основания цилиндра C, а также от выбора функции φ в представлении функции f.

Цилиндрическая функция f называется интегрируемой по цилиндрической мере μ, если для любого G-цилиндрического множества $C\ \exists\int\limits_C f\mu(dx)$.

Из этого определения следует, что f будет интегрируема по любой σ-алгебре $\mathfrak{A}_{f_1,..,f_m}(f_i \in G)$ с сужением меры μ в следующем смысле. Если f измерима относительно $\mathfrak{A}_{g_1,..,g_n}$, то она будет измерима и относительно $\mathfrak{A}_{f_1,..,f_m,g_1,..,g_n}$, а следовательно для любого $C \in \mathfrak{A}_{f_1,..,f_m}$ определён $\int\limits_C f\mu(dx)$.

Отметим, что в описанной выше конструкции для интегрируемости f недостаточно её интегрируемости по σ-алгебре $\mathfrak{A}_{g_1,..,g_n}$, где $f(x) = \varphi(g_1(x), ..., g_n(x))$ и φ - борелевская функция на $\mathbb{R}^n$. Однако для определения преобразования Фурье достаточно интегрируемости функции $e^{ig(\cdot)}$ лишь в этом узком смысле.

Теперь можно дать определение функции на меру.

Пусть цилиндрическая функция f интегрируема относительно цилиндрической меры μ. Цилиндрическая мера ν называется произведением μ и f ($\nu = f\mu$), если $\forall C \in \mathfrak{A}(E, G)\ \nu(C) = \int\limits_C f\mu(dx)$.

Пусть ν - счётно-аддитивная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Измеримая функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ называется устойчиво ν - интегрируемой относительно сдвигов в направлении вектора $u \in \mathbb{R}$, если $\exists \delta > 0$ и $\nu-$ интегрируемая функция g на $\mathbb{R}$, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ $\forall t, |t| < \delta$ выполняется $|f(\xi + tu)| \leq g(\xi)$.

Доказательство следующей теоремы (в более общем случае) можно найти в [?].

Теорема 1. *Пусть ν - счётно-аддитивная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, дифференцируемая по направлению $u \in \mathbb{R}^n$ (т.е. $\exists \nu'_u$).*

Предположим, что по мере μ интегрируемы все линейные функционалы $h \in G$. Тогда функция $\widetilde{\mu}$ дифференцируема по любому направлению $h \in G$ и справедлива формула $\widetilde{\mu}'_h = i\widetilde{h(\cdot)\mu}$.

Доказательство.

Фиксируем $g, h \in G$. Нам нужно доказать, что существует $\widetilde{\mu}'_h(g)$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости выражение $\frac{\int\limits_E e^{i(g+th)(x)}\mu(dx) - \int\limits_E e^{ig(x)}\mu(dx)}{t}$ имеет предел при $t \to 0$, равный $i\int\limits_E h(x)e^{ig(x)}\mu(dx)$. Здесь интегралы берутся по пространству $(E, \mathfrak{A}_{g,h}, \mu)$. Формально нужно ещё доказать, что полученный предел есть преобразование Фурье меры $h(\cdot)\mu$, умноженное на i, так как h может быть не измерима относительно $\mathfrak{A}_g$. Но это становится очевидным, если рассмотреть отображение $P(x) = (g(x), h(x)) : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ и воспользоваться теоремой о замене переменной (если $g = \alpha h, \alpha \in \mathbb{R}$, то в это нет необходимости). Таким образом, $\exists$ $\widetilde{\mu}'_h(g)$ и указанное равенство доказано. $\square$

Пусть цилиндрическая мера μ имеет цилиндрическую производную μ'_h. Если существует такая цилиндрическая функция $\beta^\mu_h(\cdot)$, что $\mu'_h = \beta^\mu_h(\cdot)\mu$, тогда функция $\beta^\mu_h(\cdot)$ называется логарифмической производной меры μ.

4. Гауссовские цилиндрические меры

Теперь мы можем доказать формулу для логарифмической производной гауссовской меры с обратимым корреляционным оператором.

Пусть μ - гауссовская цилиндрическая мера на гильбертовом пространстве H с нулевым матожиданием и обратимым корреляционным оператором B. Тогда μ обладает логарифмической производной $\beta^\mu_h(x) = -(x, B^{-1}h)$.

Доказательство.

Имеем цепочку равенств $\widetilde{\mu'_h}(y) = -i(h, y)\widetilde{\mu}(y) = -i(h, y)e^{-\frac{(By,y)}{2}} = -i(BB^{-1}h, y)e^{-\frac{(By,y)}{2}} = -i(B^{-1}h, By)e^{-\frac{(By,y)}{2}} = i(e^{-\frac{(By,y)}{2}})'_{B^{-1}h} = i\widetilde{\mu}'_{B^{-1}h}(y) = ii\widetilde{(\cdot, B^{-1}h)\mu}(y) = -\widetilde{(\cdot, B^{-1}h)\mu}(y)$. Здесь первое равенство следует из предложения 2.1, а предпоследнее - из предложения 3.1. Существование цилиндрической производной у меры μ следует из того факта, что мера μP^{-1} невырождена для любого непрерывного линейного отображения P в конечномерное подпространство. Из равенства преобразований Фурье следует равенство мер $\mu'_h = -(\cdot, B^{-1}h)\mu$. $\square$

Последнее равенство можно записать в виде $\mu' = -B^{-1}(\cdot)\mu$, где μ' - цилиндрическая мера со значениям в гильбертовом пространстве, а $-B^{-1}(\cdot)\mu$ - произведение гильбертовозначной цилиндрической функции на H и числовой цилиндрической меры μ.

5. Общая идея введения меры Лебега-Фейнмана

Вычислив логарифмическую производную гауссовской меры, определённой на гильбертовом пространстве H, легко понять, что эта мера обладает обобщённой плотностью, то есть такой функцией, логарифмическая производная которой равна логарифмической производной меры. Эта функция - $e^{-\frac{(B^{-1}x,x)}{2}}$.

Пусть f - цилиндрическая функция, интегрируемая по гауссовской мере с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором $\frac{1}{2\pi}I$, где I - единичный оператор. Эта мера обладает обобщённой плотностью $e^{-\pi(x,x)}$.

Функция φ называется интегрирумой по мере Лебега-Фейнмана, если она представляется в виде $f(x)e^{-\pi(x,x)}$. Интеграл от f по этой мере это по определению $\int\limits_H f(x)\mu(dx)$.