Полубесконечные шашки Фейнмана

Дмитриев Михаил Дмитриевич

Студент

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

E-mail: mddmitriev@edu.hse.ru

Научный руководитель *— Скопенков Михаил Борисович*

«Шашки Фейнмана» — это наиболее элементарная модель движения электрона. Модель была предложена Ричардом Фейнманом в 1965 году. Она известна также как одномерное квантовое блуждание. Модель наиболее примечательна тем, что она наглядно иллюстрирует многие базовые идеи квантовой теории и является одной из архитектур универсального квантового компьютера.

Модель можно легко определить следующим образом.

Путь шашки — это конечная последовательность таких целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1,1)$, либо $(-1,1)$. *Поворот* — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. *Стрелка* — это комплексное число

$$a(x, t \operatorname{bypass} x_0) := 2^{(1-t)/2}\, i \sum_s (-i)^{\operatorname{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из клетки $(0,0)$ в клетку (x,t), *начинающимся с хода вправо-вверх* и не проходящим через точки прямой $x = x_0$ кроме, быть может, начальной и конечной точки, а $\operatorname{turns}(s)$ обозначает общее число поворотов в s. Здесь и далее пустая сумма по определению считается равной 0. Обозначим

$$P(x, t \operatorname{bypass} x_0) := |a(x, t \operatorname{bypass} x_0)|^2.$$

Исследование данной модели началось со следующего яркого результата.

Теорема 1 (Амбаинис и др., [1). *] Для любого целого $t > 0$ выполнено*

$$a(0, t \operatorname{bypass} 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t = 2; \\ \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2k-1/2}}, & t = 4k; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того,

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} P(0, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \frac{2}{\pi}.$$

Последнее выражение показывает, что вероятность возвращения одномерного квантового блуждания в начальную точку равна $\frac{2}{\pi}$. Напомним, что для классического блуждания эта вероятность равна 1 (теорема Пойа).

Мы передокажем теорему 1 элементарными методами, отличными от используемых в статье [1].

Литература

1. A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
2. R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965.
3. J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1 (2009), 339-359.
4. Skopenkov M. Ustinov A. Feynman checkerboard: towards algorithmic quantum theory 2020// https://arxiv.org/abs/2007.12879
5. S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106. `http://imat-relpred.yandex.ru`