# О восстановлении некоторых графов по их подграфам

***Рахимов Умархон Мухторжон угли***

*Студент*

*Факультет ПМиИ филиала МГУ имени М. В. Ломоносова, Ташкент, Узбекистан*

*E-mail:* umarkhanrakhimov@gmail.com

***Научный руководитель** — Селезнева Светлана Николаевна*

Напомним некоторые определения теории графов [1]. *Графом* называется упорядоченная пара $(V, E)$, где $V$ — множество вершин, $E$ — множество рёбер, т.е. неупорядоченных пар различных вершин $(v, w)$, где $v, w \in V$. Для графа $G = (V, E)$ введём обозначения: $V(G) = V, E(G) = E$. *Подграфом* графа $G = (V, E)$ называется такой граф $G_0 = (V_0, E_0)$, что $V_0 \subseteq V, E_0 \subseteq$ E и для любого ребра $e = (v, u) \in E_0$ вершины $v, u \in V_0$. Число рёбер, исходящих из вершины $v$, называется её *степенью* и обозначается через $d(v)$. Чередующаяся последовательность вершин и рёбер графа $v_1, e_1, ..., e_k, v_{k+1}$ такая, что $e_i = (v_i, v_{i+1})$ для всех $i = 1, ..., k$, называется *простой цепью,* соединяющей вершины $v_1$ и $v_{k+1}$, если все её рёбра и если все её вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Простая цепь, у которой крайние вершины совпадают, называется *простым циклом. Связным* называется граф, для любой пары вершин которого существует простая цепь, их соединяющая. *Дерево* — это связный граф без циклов. Связный граф, у которого есть только один цикл, называется *унициклическим* графом. Пусть $G = (V, E)$ — граф, где $|V| > 2$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, тогда положим $G_i = (V, E \backslash \{e_i\})$, $i = 1, \ldots, m$. В данной работе рассматривается следующая гипотеза [2]:

**Гипотеза Харари (1964 г.).** *Если $G = (V, E)$— граф, $|V| > 3$, то его можно однозначно восстановить по $\{G_i\}$ $i = 1, \ldots, m$.*

Данная гипотеза важна, например, при исследовании молекулярных структур [3]. Гипотеза в общем случае не доказана. Она частично решена для деревьев [4]. Также была доказана восстановимость некоторых инвариантов графов [5]. В данной работе рассматривается восстановимость унициклических графов.

**Лемма 1.** *Любой унициклический граф $G = (V, E)$ можно представить в виде $C_k \cup \mathcal{T}$, где $C_k$— цикл длины $k$, $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_p\}, p \leq k$ — множество $\{T_i\}$ деревьев, исходящих из вершины $c_i \in$*

*$V(C_k)$, $i = 1, \ldots, k$, $c_s \neq c_q$ при $s \neq q$, причем $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.*

*Уникальной веткой* унциклического графа $G = (V, E)$ будем называть такое дерево $T_i \in \mathcal{T}$, что для любых $j = 1, \ldots, p$, деревья $T_j$, $T_i$ изоморфны тогда и только тогда, когда $i = j$.

**Лемма 2.** *Пусть у унициклического графа $G = (V, E)$ $d(c_j) \leq 3$ для любых $j = 1, \ldots, k$, тогда для любых $i = 1, \ldots, m$, где $m = |E|$, верно что $G_i$ — один из следующих графов:*
а) *дерево;*
б) *граф с двумя связными компонентами, одна из которых унициклический граф с исходящими из него p деревьями, другая — дерево;*
в) *граф с двумя связными компонентами, одна из которых унициклический граф с исходящими из него $p - 1$ деревьями, другая — дерево.*

**Лемма 3.** *Пусть унициклический граф $G = (V, E)$, $|C_k| \geq 4$, $|\mathcal{T}| \geq 4$, имеет уникальную ветку и $d(c_j) \leq 3$ для любых $j = 1, \ldots, k$, тогда эту ветку можно выделить из $\{G_i\}$.*

**Теорема 1.** *Если для унициклического графа $G = (V, E)$ верно:*
1) *$d(c_j) \leq 3$ для любых $j = 1, \ldots, k$;*
2) *$|C_k| \geq 5$, $|\mathcal{T}| \geq 5$;*
3) *найдутся не менее трех уникальных веток;*
*то граф $G = (V, E)$ восстановим по $\{G_i\}$.*

## Литература


1. Емеличев В. А. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. Harary F. On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs // Theory of Graphs and its Applications. 1964. P. 47–52.
3. Fowler W. P. Molecular graphs and molecular conduction: the d-omni-conductors // In Physical Chemistry Chemical Physics. 2020. V. 22, N 3. P. 1349–1358.
4. Molina R. The edge reconstruction number of a tree // Vishwa International Journal of Graph Theory. 1993. V. 2, N 2. P. 117—130.
5. Братцева Е. В. О восстанавливаемости основных инвариантов графа // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 109–110.