О сравнении асимптотического метода с методом интегральных уравнений для задачи дифракции на полосе

Долбнин Андрей Алексеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: andredolbnin@gmail.com

Научный руководитель — *Захаров Евгений Владимирович*

Рассматривается задача дифракции E-поляризованной плоской электромагнитной волны E_z^N на бесконечно тонкой идеально проводящей полосе P, имеющей ширину $2a$ и неограниченную длину $(x = 0, -a \le y \le a, -\infty < z < +\infty)$:

$$\Delta E_z^S + k^2 E_z^S = 0,\ (x, y) \notin P, \tag{1}$$

$$E_z^S = -E_z^N,\ (x, y) \in P \tag{2}$$

с условиями излучения на бесконечности и с условиями на ребре. Рассматривается высокочастотный случай, когда ширина полосы намного больше длины волны.

Цель работы - сравнение двух методов решения поставленной задачи: асимптотического метода и метода интегральных уравнений. Обсуждаются достоинства и недостатки обоих методов.

Асимптотический метод решения задачи (1), (2) изложен, например, в [1, 2]. В нём выражение для E_z^S выписывается через вектор-потенциал

$$E_z^S = ikA_z,\ \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\limits_{-a}^{a} \mathbf{j^0}(\eta)d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}}{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}\,d\zeta. \tag{3}$$

Используя выражения (3), можно выписать решение задачи для случая $r \gg ka^2$, $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$:

$$E_z^S = E_{0z}^S \left(-\frac{\cos[ka(\sin\alpha - \sin\varphi)]}{\cos\frac{\alpha+\varphi}{2}} + i\frac{\sin[ka(\sin\alpha - \sin\varphi)]}{\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}} \right) \frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}}. \tag{4}$$

В методе интегральных уравнений решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$E_z^S(x,y) = -\frac{\pi i}{2}\int\limits_{-a}^{a} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}\right) j(y_0)dy_0, \tag{5}$$

где плотность токов $j(y_0)$, в силу условия (2), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\pi i}{2}\int\limits_{-a}^{a} H_0^{(1)}(k|y-y_0|)j(y_0)dy_0 = E_z^N(x=0,\, y). \tag{6}$$

Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (6) является некорректно поставленной задачей. Но в силу логарифмической особенности ядра к (6) применяется метод саморегуляризации, после чего интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Метод саморегуляризации для резонансного случая рассматривается в [3, 4].

Расчёты (4) и (5), (6) были реализованы на языке Python3. Результаты, полученные разными методами, совпадают с некоторой степенью точности, что говорит о правильности численных решений. Показано преимущество метода интегральных уравнений, заключающееся в простом выводе формул решения, универсальном подходе для аналогичных задач и возможностью рассчитывать поле не только в дальней зоне, но и вблизи полосы.

Литература

1. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио, 1962.
2. Уфимцев П. Я. Основы физической теории дифракции. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
3. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода // Вычислительные методы и программирование. 1968. №. 10. С. 49-54.
4. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Алгоритм решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей полосе // Вычислительные методы и программирование. 1969. №. 13. С. 158-166.