Обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестным источником

Андрианов Даниил Сергеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: justdaniel99@gmail.com

Научный руководитель — *Денисов Александр Михайлович*

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varepsilon q(x) u(x,t) + f(x) g(t),\ (x,t) \in \triangle_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0,\ -aT \le x \le aT, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = 0,\ -aT \le x \le aT, \tag{3}$$

где $\triangle_T = \{(x,t) : -a(T-t) \le x \le a(T-t),\ 0 \le t \le T\}$, функции $q(x) \in C^1[-aT, aT]$, $f(x) \in C^1[-aT, aT]$, $g(t) \in C[0,T]$; a и ε - положительные числа.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $q(x)$ и $f(x)$, числа a и ε заданы, а функция $g(t)$ неизвестна. Требуется определить функции $g(t)$ и $u(x,t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи Коши:

$$u(0,t) = p(t),\ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Определение 1. *Функции $g(t)$ и $u(x,t)$ называются решением обратной задачи, если $u(x,t) \in C^2(\triangle_T)$, $g(t) \in C[0,T]$, и $u(x,t)$, $g(t)$ удовлетворяют* (1)–(4).

Если функции $g(t)$ и $u(x,t)$ являются решением обратной задачи, то функции $u(x,t)$, $v(x,t) = u_x(x,t)$, $g(t)$ являются решениями системы интегральных уравнений:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \varepsilon q(s) u(s,\tau) ds d\tau +$$

$$+\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s) g(\tau) ds d\tau,\ (x,t) \in \triangle_T; \tag{5}$$

$$v(x,t) = \frac{\varepsilon}{2a} \int_0^t [q(x + a(t-\tau)) u(x + a(t-\tau), \tau) -$$

$$-q(x-a(t-\tau))u(x-a(t-\tau),\tau)]d\tau+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)[f(x+a(t-\tau))-$$

$$-f(x-a(t-\tau))]d\tau,\ (x,t)\in\Delta_T; \qquad (6)$$

$$g(t)=-\frac{a\varepsilon}{2f(0)}\int_0^t[q'(a(t-\tau))u(a(t-\tau),\tau)+q(a(t-\tau))v(a(t-\tau),\tau)-$$

$$-q'(-a(t-\tau))u(-a(t-\tau),\tau)-q(-a(t-\tau))v(-a(t-\tau),\tau)]d\tau-$$

$$-\frac{a}{2f(0)}\int_0^t g(\tau)[f'(a(t-\tau))-f'(-a(t-\tau))]d\tau+\frac{p''(t)}{f(0)}-\frac{\varepsilon q(0)p(t)}{f(0)},$$

$$0\le t\le T. \qquad (7)$$

Используя систему интегральных уравнений (5)–(7), можно доказать существование и единственность решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in C^1[-aT,aT]$, $q(x)\in C^1[-aT,aT]$, $p(t)\in C^2[0,T]$, $f(0)\neq 0$ и $p(0)=p'(0)=0$. Тогда существуют и единственны функции $u(x,t)$ и $g(t)$, являющиеся решением обратной задачи.*

Система интегральных уравнений (5)–(7) была использована для построения итерационного численного метода для решения обратной задачи. Итерационные численные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений рассматривались в работах [1]–[2].

Итерационный численный метод был программно реализован на языке Python, эффективность метода продемонстрирована рядом проведенных вычислительных экспериментов.

Литература

1. Баев А. В. Об одном методе решения обратной задачи рассеяния для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28. – № 1. – С. 25-33.
2. Денисов А. М. Итерационный метод решения обратной задачи для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной. // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 7. – С. 973-981.