Трехкомпонентный метод сопряженных градиентов в задаче оптимального управления колебательными процессами

Камаев Богдан Эльмарович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kamae98@gmail.com

***Научный руководитель** — Артемьева Людмила Анатольевна*

Имеется однородная упругая гибкая струна, один конец которой управляется за счет упругой силы, а другой конец закреплен, кроме того к каждой точке струны приложена внешняя сила:

$$
\begin{gathered}
y_{tt}(x,t) = y_{xx}(x,t) + q(x,t),\ (x,t) \in Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\} \\
y_x(0,t) = p(t),\ y(l,t) = 0,\ 0 < t < T, \\
y(x,0) = 0,\ y_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l, \\
u = (q(x,t), p(t)) \in U \subseteq H = L_2(Q) \times L_2[0,T],
\end{gathered}
$$

Требуется к заданному моменту времени T, управляя указанными внешними силами $u = (q(x,t), p(t))$, привести струну в состояние, характеризуемое смещением и скоростью точек струны, как можно меньше отличающееся от некоторого заданного состояния при минимальных затратах энернии. Таким образом в рамках работы необходимо решить задачу многокритериальной оптимизации. Для ее решения предлагается воспользоваться методом свертки [2], а именно исходную задачу свести к задаче минимизации функции $F(u,\lambda)$ при фиксированном λ:

$$
\begin{gathered}
F(u,\lambda) = \lambda_1 \int\limits_0^l (y(x,T) - y_1(x))^2 dx + \lambda_2 \int\limits_0^l (y_t(x,T) - y_2(x))^2 dx + \\
+\lambda_3 \int\limits_0^l \int\limits_0^T q^2(x,t)\,dx\,dt + \lambda_4 \int\limits_0^T p^2(t)\,dt,\ u \in H, \lambda \in E_+^4
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Для решения задачи минимизации сверки (1) предлагается воспользоваться трехкомпонентным методом сопряженных градиентов [4]. Трехкомпонентный метод в отличее от классического метода сопряженных градиентов всегда порождает направление спуска и сводится к построению последовательности $u_k = (q_k(x,t), p_k(t))$ по правилу:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k d_k,$$

где d_k задано следующей трехкомпонентной формулой:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & g_k^T g_k = 0 \\ -g_k + \beta_k \frac{(g_k^T g_k) d_{k-1} - (g_k^T d_{k-1}) g_k}{g_k^T g_k}, & g_k^T g_k \neq 0 \end{cases}$$

где $g_k = F'(u_k, \lambda)$ и β_k в частности может вычисляться с использованием формулы Флетчера-Ривса:

$$\beta_k = \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}}$$

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
2. Краснощеков П. С., Морозов В. В., Попов Н. М. Оптимизация в автоматизированном проектировании.: МАКС Пресс, 2008.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны.: УМН, 2005.
4. Narushima Y., Yabe H., Ford J. A three-term conjugate gradient method with sufficient descent property for unconstrained optimization 2011, P. 212–230.