Прямой экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования

Ершов Максим Алексеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `maxim.ershov97@mail.ru`

Научный руководитель — *Артемьева Людмила Анатольевна*

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач линейного программирования:

$$\langle c, x\rangle \to \inf, \quad x \in X = \{x \in E^n : x \geqslant 0,\ Ax \leqslant b\},$$

$$\langle -b, \lambda\rangle \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in E^m : \lambda \geqslant 0,\ A^T\lambda \geqslant -c\},$$

где $c \in E^n, b \in E^m$ — заданные векторы, A — заданная матрица размера $m \times n$.

Предположим, что хотя бы одно из допустимых множеств пусто: либо $X = \emptyset$, либо $\Lambda = \emptyset$. В этом случае, в силу двойственности, обе задачи не имеют решения и называются противоречивыми. Необходимо произвести коррекцию пары противоречивых двойственных задач линейного программирования.

С этой целью предлагается свести задачу коррекции к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа. Искать седловую точку предлагается с помощью модификации регуляризованного варианта экстраградиентного метода.

Так как предполагается, что матрица A не изменяется, коррекции подвергаются только векторы b, c. Их новые значения $c + \mu$ и $b + h$ должны сформировать пару взаимодвойственных задач линейного программирования, имеющих непустое множество решений:

$$\langle c + \mu, x\rangle \to \inf, x \in X(h) = \{x \in E^n : x \geqslant 0, Ax \leqslant b + h\},$$

$$\langle -(b + h), \lambda\rangle \to \sup, \lambda \in \Lambda(\mu) = \{\lambda \in E^m : \lambda \geqslant 0, A^T\lambda \geqslant -(c + \mu)\}.$$

Для решения поставленной задачи предлагается ввести функцию Лагранжа и искать её седловую точку $w_* = (x_*, \lambda_*)$.

$$T_\alpha(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \frac{\alpha}{2}(||x||^2 - ||\lambda||^2) \to \texttt{saddle},\ x \geqslant 0, \lambda \geqslant 0, \alpha > 0$$

где $L(x,\lambda) = < c, x > + < \lambda, Ax - b >$, α — параметр регуляризации. Найденная седловая точка будет являться решением исходной задачи коррекции [3].

Для нахождения реально вычислимого устойчивого приближения к вектору коррекции w_* предлагается использовать прямой экстраградиентный метод. Если k-ое приближение $(x_k, \lambda_k)^T$ уже получено, то на следующем шаге сначала находится вспомогательное приближение $\overline{x_k}$:

$$\overline{x_k} = (x_k - \beta_k T_x^{'}(x_k, \lambda_k))^+$$

а затем определяется итоговое приближение $(x_{k+1}, \lambda_{k+1})^T$:

$$\lambda_{k+1} = (\lambda_k + \beta_k T_\lambda^{'}(\overline{x_k}, \lambda_k))^+, \quad x_{k+1} = (x_k - \beta_k T_x^{'}(\overline{x_k}, \lambda_{k+1}))^+$$

где $T_x'(x,\lambda)$, $T_\lambda'(x,\lambda)$ — производные функции Лагранжа, а $(\cdot)^+$ — проекция на неотрицательный ортант.

Теорема 1. *Если при использовании метода параметры α, β удовлетворяют следующим условиям:*

$$\alpha_k > \alpha_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty,$$

$$0 < \overline{\beta} \leqslant \beta_k, \quad \begin{cases} \beta_k \leqslant (||A|| + \alpha_k)^{-1} \\ \beta_k \leqslant (3\alpha_k)^{-1} \end{cases} ;$$

w_* — оптимальный вектор коррекции исходных задач, $(x_0, \lambda_0)^T \geqslant 0$ — произвольное начальное приближение, то:

$$\alpha_k(x_k, \lambda_k) \to w_* \text{ при } k \to \infty.$$

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации, т.I,II. М.: МЦНМО, 2011.
2. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. М.: Факториал-пресс, 2008.
3. Васильев Ф. П., Потапов М. М., Артемьева Л. А. Экстраградиентный метод коррекции несобственных задач линейного программирования. ЖВМиМФ, Т. 58, № 12, С. 1992–1998, 2018.