О двух моделях клеточных схем

Зизов Вадим Сергеевич

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: vzs815@gmail.com

***Научный руководитель** — Ложкин Сергей Андреевич*

Модель клеточных схем (**КС**) является математической моделью интегральных схем (ИС). Она отличается от хорошо изученной модели «обычных» схем из функциональных элементов (СФЭ) наличием требований на геометрию схемы, учитывающих особенности физического синтеза. Модель **КС** впервые была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в работе [1], где для конкретного базиса из коммутационных и функциональных элементов для $n = 1, 2, \ldots$ был получен порядок роста функции Шеннона $A(n)$ вида 2^n, характеризующей сложность (площадь) самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от n переменных. Позднее А. Альбрехтом [2] было доказано, что функция Шеннона $A(n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ асимптотически равна $\sigma 2^n$, где σ - константа, точное значение которой в настоящее время неизвестно. Из мощностных соображений и работ [1, 2] следует, что σ находится в сегменте $[\frac{1}{4}, \frac{9}{2}]$ для исследуемого базиса. Заметим, что в работе [3] был предложен специальный базис **КС**, для которого константа, аналогичная константе σ, равна 1, то есть соответствующая функция Шеннона для площади КС, реализующих ФАЛ от n переменных, асимптотически равна 2^n.

В работе [4] для одного специального базиса **КС** - базиса $\text{Б}_0'$ были получены асимптотические точные верхние и нижние оценки для площади схем, реализующих дешифратор порядка n, которые совпадают в первом члене разложения, имеют вид $n2^{n-1}\left(1 \pm O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

В данной работе рассматривается две модели в одном базисе **КС** $\text{Б}_0'$, связанном с элементами стандартного базиса алгебры логики $\text{Б}_0 = \{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$. Модели отличаются возможными разрешениями на соединение элементов. Показывается, что верхняя оценка функции Шеннона **КС** не зависит от выбора модели. Показываются нижние оценки функции Шеннона для **КС**.

Теорема 1 (об универсальном методе синтеза)**.** *Для любой ФАЛ f от n переменных существует реализующая её **КС** Σ такая, что:*

$$A(\Sigma) \leqslant 2^n + O(n2^{\frac{n}{2}}), \quad n \to \infty.$$

Определение 1. *Определим сложность $A(f)$ ФАЛ f как минимальную из площадей* ***КС*** *Σ, реализующих f. Введём функцию Шеннона для функционала $A(f)$:*

$$A(n) = \max_{f \in P_2(n)} A(f). \tag{1}$$

Здесь максимум берётся по всем ФАЛ от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Теорема 2 (о нижней оценке площади)**.** *Для функции Шеннона функционала площади A в модели клеточных схем без повторных входов для модели 1 верна следующая оценка:*

$$A(n) \geqslant \frac{2^n}{\log_2(25)}.$$

Теорема 3 (о нижней оценке площади)**.** *Для функции Шеннона функционала площади A в модели клеточных схем без повторных входов для модели 2 верна следующая оценка:*

$$A(n) \geqslant \frac{2^n}{\log_2(45)}.$$

Литература

1. Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. — 1967. — Т. 19. — С. 285–292.
2. Альбрехт А. О схемах из клеточных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. — 1975. — Т. 33. — С. 209–214.
3. Грибок С. В. Об асимптотике сложности клеточного контактного дешифратора // Вестник ННГУ — 2012. — Т. 1, № 4. — С. 225–231.
4. Ложкин С. А., Зизов В. С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем.науки. — 2020. — Т. 162, № 3. — С. 322–334.