# Оценки элементов фундаментальных систем решений и функций Грина семейства регулярно вырождающихся дифференциальных уравнений

***Емельянов Дмитрий Павлович***

*Аспирант*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* `emelianov@cs.msu.ru`

***Научный руководитель** — Ломов Игорь Сергеевич*

Рассматривается семейство вырождающихся линейных дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$x^m y''(x) + c(x)y'(x) - (a(x) + \pi^2 k^2)y(x) = 0, \qquad (1)$$

где $1 < m < 2$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (0, b)$, функции $a(x)$ и $c(x)$ аналитические на отрезке $[0, b]$, $c(0) = 0$ (условие регулярности вырождения).

Обобщаются на описанный случай результаты, ранее полученные для случаев $m = 1$ и $m = 2$ в работах [1], [2] и [3].

Нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(0) = 0$ будем обозначать $Y_k^0(x)$. Аналогично, обозначим как $Y_k^b(x)$ нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(b) = 0$. Очевидно, что $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** *При некотором выборе $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$ имеют место следующие оценки для всех $x \in (0, b)$ и $k \in \mathbb{N}$:*

$$C_1 \cdot \frac{x \cdot \exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)}{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}} \le Y_k^0(x) \le C_2 \cdot \frac{x \cdot \exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)}{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}},$$

$$C_1 \cdot \frac{k \cdot \exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)}{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}} \le Y_k^{0\,\prime}(x) \le C_2 \cdot \frac{k \cdot \exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)}{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}},$$

$$(-1)^M \cdot Y_k^{b\,(M)}(x) \le C_2 \cdot \frac{k^{1+M}}{x^M} \cdot \frac{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}}{\exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)}, \quad M = 0, 1,$$

*а при* $x \in (0, b-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место*

$$C_1 \cdot \frac{k^{1+M}}{x^M} \cdot \frac{1 + \left(kx^{1-m/2}\right)^{\alpha+1/2}}{\exp\left(\dfrac{2\pi k x^{1-m/2}}{2-m}\right)} \leq (-1)^M \cdot Y_k^{b\,(M)}(x), \quad M = 0, 1,$$

*где* $0 < C_1 < C_2$ *– постоянные, не зависящие от* $x$ *и* $k$, *а* $\alpha = 1/(2-m)$.

Пусть $G_k(x, \xi)$ – функции Грина краевых задач Дирихле для уравнений (1).

**Теорема 2.** *Верны следующие интегральные оценки:*

$$\int\limits_0^b |G_k(x,\xi)|\, d\xi \leq \frac{C}{k}, \quad x \in [0, b], \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\int\limits_0^b \left| \frac{\partial^M G_k}{\partial x^M}(x,\xi) \right| d\xi \leq \frac{C}{k^{2-M}}, \quad x \in [\varepsilon, b], \quad k \in \mathbb{N}, \quad M = 0, 1,$$

*где постоянная* $C = C(\varepsilon)$ *не зависит от* $x$ *и* $k$, $\varepsilon > 0$.

## Литература


1. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 5. С. 655-672.
2. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 45–58.
3. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета, 2011. — 456 с.