Случайные блуждания на решётках

Михайлова Светлана Олеговна, Петухова Екатерина Сергеевна

Студент, студент

МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Россия

E-mail: somikhaylova@edu.hse.ru, espetukhova_1@edu.hse.ru

***Научный руководитель** — Данилов Владимир Григорьевич*

В работе рассматривается задача случайного блуждания частицы по решётке с дискретным времени и строится асимптотическое решение (с обоснованием) неосциллирующим методом ВКБ.

Пусть частица в начальный момент времени находится в нуле и h — направленный шаг блуждания (влево-вправо). Тогда за k шагов частица окажется в точке $x_k = kh$, где на каждом шаге добавляется $\pm|h|$ с учётом направления. Обозначим через U_k^n вероятность нахождения частицы в точке x_k на n шаге блуждания. Таким образом, простейшее симметричное случайное блуждание частицы можно описать как:

$$U_k^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{k-1}^n + U_{k+1}^n). \tag{1}$$

В общем случае блуждание по одномерной решётке описывается разностными уравнениями вида:

$$U_i^{n+1} = a_{i,i-k}U_{i-k}^n + \ldots + a_{i,i+m}U_{i+m}^n, \tag{2}$$

где $a_{i,j}$ — вероятность перехода из состояния j в состояние i, такая что $a_{i,j} \geqslant 0$, $\sum_{j=i-k}^{i+m} a_{i,j} = 1$; величины $a_{i,j}$ и U_i^0 заданы. Асимптотическое решение задачи удовлетворяет уравнению с учётом невязки F_i^n:

$$\hat{U}_i^{n+1} = a_{i,i-k}\hat{U}_{i-k}^n + \ldots + a_{i,i+m}\hat{U}_{i+m}^n + F_i^n, \tag{3}$$

Для точного решения $F_i^n = 0$, но, так как мы предполагаем построение приближенного решения, удовлетворяющего уравнению с малой невязкой, необходимо рассматривать общее решение (3) при $F_i^n \not\equiv 0$. Функцию дискретного аргумента U_i^n мы заменяем на функцию $U\big(x,t\big)$, такую что $U_i^n = U(n\tau, ih)$, где τ – длина шага по времени, а уравнение на решётке заменяем на псевдодифференциальное уравнение:

$$e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}}U = (\sum_{j=-k}^{m} a_j(x)e^{jh\frac{\partial}{\partial x}})U, \tag{4}$$

где $e^{kh\frac{\partial}{\partial x}}(f) = f(x+kh)$ – оператор сдвига. Предполагая, что $a_j(ih) = a_{i,j}, U(ih,0) = U_i^0$, и рассматривая псевдодифференциальное уравнение в точках $t_n = n\tau, x_i = ih$, получим уравнение (2). С учётом невязки:

$$e^{\tau\frac{\partial}{\partial t}}\hat{U} = (\sum_{j=-k}^{m} a_j(x)e^{jh\frac{\partial}{\partial x}})\hat{U} + F(x,t), \tag{5}$$

где функция F_i^n (малая невязка) заменена на $F(x,t)$, такую что $F_i^n = F(n\tau, ih)$.

Решение задачи Коши для уравнения (5) в случае постоянных коэффициентов можно построить с помощью преобразования Фурье, применяя к построенному решению метод перевала, получим, что при $t \geqslant const \cdot h^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$ решение представимо в виде $U_{as} = e^{-\frac{S(x,t)}{h}}\varphi(x,t)$. В случае переменных коэффициентов можно в таком же виде построить асимптотическое решение.

Теорема 1. *Пусть $S(x,t) \in C^{\infty}, S_{xx} > 0$, при $t \in [0,T]$ и $F_i^n = O(h^2)e^{-S/h}$, тогда справедлива следующая оценка:*

$$\max_i |e^{(\frac{S}{h})_i^{n+1}}(U - U_{as})_i^{n+1}| \leqslant Che^{-\frac{T}{2}\min\limits_{x,t} S_{xx} f(S'_x)}$$

где $0 < f(S'_x) < const$ – функция, зависящая от набора вероятностей a_j, для симметричного блуждания (1) $f(S'_x) = (\frac{1}{\operatorname{ch} S'_x})^2$

В заключение авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. профессору В. Г. Данилову за идею работы и регулярные полезные консультации.

Литература

1. Danilov V. G. Nonsmooth Nonoscillating Exponential-type Asymptotics for Linear Parabolic PDE. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2017. Vol. 49. No. 5. P. 3550-3572.
2. Дашко А. В., Михайлова С. О., Петухова Е. С. Случайные блуждания на решётках. Межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского. Материалы конференции. — М. МИЭМ НИУ ВШЭ, 2021. 22–24 стр.