Численное решение задач пороупругости на неструктурированных сетках

Ануприенко Денис Валерьевич
Аспирант, инженер-исследователь
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия
E-mail: denis-anuprienko@yandex.ru

Научный руководитель — _Капырин Иван Викторович_

Учет связи между фильтрацией жидкости в пористой среде и деформацией пористой среды необходим при моделировании широкого круга процессов, среди которых добыча углеводородов, подземная закачка углекислого газа и различные процессы, протекающие вблизи пунктов захоронения радиоактивных отходов. При этом сложная слоистая и анизотропная структура геологических областей приводит к использованию неструктурированных сеток с ячейками достаточно общего вида, что предъявляет повышенные требования к используемым численным методам.

В данной работе рассматривается модель процесса пороупругости в простейшем случае среды, чьи поры целиком заполнены жидкостью. Уравнения модели следуют теории Био [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c_0 P + \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}\right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q, \tag{1}$$

$$-\nabla \cdot (\sigma - \alpha P \mathbb{I}) = \mathbf{f}. \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает закон сохранения массы жидкости, а уравнение (2) – механическое равновесие в пористой среде. Уравнения содержат следующие величины: P – давление жидкости, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений пористой среды, $\mathbf{q}$ – вектор потока жидкости, σ – тензор напряжений, Q – объемные источники и стоки, c_0 – коэффициент упругой емкости, $\mathbf{f}$ – вектор внешних сил, $\mathbb{I}$ – единичный тензор (единичная матрица размера 3).

Уравнения дополняются граничными условиями и замыкающими соотношениями: законом Дарси для потока жидкости

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu}\mathbb{K}\nabla\left(P + \rho g z\right) \tag{3}$$

и обобщенным законом Гука для связи тензора напряжений и вектора перемещений:

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon = \mathbb{C}\frac{(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}. \tag{4}$$

Здесь μ – вязкость жидкости, $\mathbb{K} = \mathbb{K}^T > 0$ – тензор фильтрации, матрица размера 3, ρ – плотность жидкости, ε – тензор деформаций, $\mathbb{C}$ – тензор упругости.

Для дискретизации уравнения фильтрации традиционно применяется локально консервативный и применимый на сетках с ячейками достаточно общего вида метод конечных объемов (МКО). Для уравнения упругости наиболее популярным вариантом является метод конечных элементов, однако этот метод испытывает существенные трудности при работе с ячейками произвольной или искаженной формы, которые часто возникают при построении сеток в геологических областях. Из альтернатив методу конечных элементов был выбран метод виртуальных элементов (МВЭ) – относительно новый метод дискретизации, работающий на широком классе сеток. В данной работе рассматривается схема для уравнений пороупругости, использующая МКО для уравнения фильтрации и МВЭ для уравнения упругости, основанная на схеме из работы [2]. Дискретизация по времени является полностью неявной, используется полное сопряжение для процессов, когда все сеточные уравнения собираются в единую линейную систему, решаемую один раз на шаге по времени. Для полученной схемы представлены численные эксперименты, демонстрирующие сходимость по пространству и времени, приводится пример решения реалистичной задачи.

Литература

1. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation //Journal of Applied Physics 12(2) (1941) 155–164.
2. Coulet J. et al. A fully coupled scheme using virtual element method and finite volume for poroelasticity //Computational Geosciences 24(2) (2020) 381–403.