Явный вид взаимосвязи разрешающих операторов задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения в дивергентной форме с переменными коэффициентами

Боговский Антон Михайлович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: abogovski@gmail.com

Научный руководитель *— Денисов Василий Николаевич*

Рассматриваются краевые задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в дивергентной форме с матричными переменными коэффициентами $\mathbf{A}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ и однородными краевыми условиями в слабых постановках с первыми производными из $L_p(\Omega)$ для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ранее, в случае постоянных коэффициентов, в [1] и [2] уже была установлена взаимосвязь между слабыми решениями задач Дирихле и Неймана и найден ее явный вид как для односвязной, так и для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В настоящем докладе такая взаимосвязь устанавливается уже для случая переменных коэффициентов, подчиненных условию равномерной эллиптичности.

Как уже установлено в [1], рассматриваемая слабая постановка задачи Неймана эквивалентна разложению пространства Лебега $\mathbf{L}_p(\Omega)$ векторных полей $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ в прямую сумму подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ и $\mathbf{G}_p(\Omega)$, соответственно, где первое из двух подпространств определяется как замыкание в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ его подпространства $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых соленоидальных в Ω векторных полей. При этом, в силу известной теоремы де Рама, для любого открытого связного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ аннулятором подпространства $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega) \subset \mathbf{L}_p(\Omega)$ служит подпространство $\mathbf{G}_q(\Omega)$ всех потенциальных векторных полей в $L_q(\Omega)$ с сопряженным показателем $q = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Соответственно, аннулятором подпространства $\mathbf{G}_p(\Omega)$ будет подпространство $\mathring{\mathbf{J}}_q(\Omega)$ с тем же сопряженным показателем q. Из такой двойственности следует, как известно, что необходимым и достаточным условием справедливости разложения $\mathbf{L}_r(\Omega) = \mathring{\mathbf{J}}_r(\Omega) \oplus \mathbf{G}_r(\Omega)$ с каким-либо показателем $r = p \in (1, \infty)$ служит его справедливость с сопряженным показателем $r = p/(p-1)$.

Для любой многосвязной области связь между разрешающими операторами в стандартных слабых постановках задач Дирихле и Неймана уже не будет такой же простой, как в случае односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Детализация этой связи требует введения функционального пространства безихревых векторных полей, принципиально отличающегося от пространства потенциальных векторных полей для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Как и в [1], связь между разрешающими операторами краевых задач Дирихле и Неймана в слабых постановках с первыми производными из $L_p(\Omega)$ устанавливается в обе стороны с использованием линейной операции антисимметрической инволюции, опираясь на соответствующие разложения пространства $\mathbf{L}_p(\Omega)$ в соответствующие прямые суммы подпространств соленоидальных и потенциальных или безвихревых векторных полей.

Отметим, что в трехмерном случае наличие подобной простой взаимосвязи между разрешающими операторами задач Дирихле и Неймана опровергается построением явных примеров. Простейшим примером является лапласиан во внешности конического острия.

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору кафедры ОМ факультета ВМК МГУ, д.ф.-м.н. Василию Николаевичу Денисову за внимание к работе и конструктивное обсуждение.

Литература

1. В. Н. Денисов, А. М. Боговский, О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области. — Матем. заметки. 2020, Т. 107, Выпуск 1, С. 32–48.
2. Боговский А. М. О взаимосвязи слабых решений задач Дирихле и Неймана для многосвязной области.— Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» – М.: МАКС Пресс, 2021. – ISBN 978-5-317-06593-5 (https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/21935/uid124777_report.pdf)