Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Некоторые характеристики решетки замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста

Научный руководитель – Часовских Анатолий Александрович

Комков Степан Алексеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: polkachxd@rambler.ru

Рассмотрим декартову степень $n \in \mathbb{N}$ конечного множества A с заданным на нем множеством операций M. Элементы A^n называют наборами. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам покомпонентно, можно получать новые наборы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(a_1^1,\ldots,a_1^k) \\ \vdots \\ f(a_n^1,\ldots,a_n^k) \end{pmatrix}, \ f \in M.$$

Темпом роста для пары (A, M) называют функцию $d_{(A,M)}(n),\ n \in \mathbb{N}$, равную для каждого n минимальному числу наборов, из которых можно получить всё A^n, применяя операции из M покомпонентно. В дальнейшем без утери общности будем полагать, что $A = E_k$. Говоря о темпе роста множества функций M, будем иметь в виду темп роста пары (E_k, M), где $M \subset P_k$.

Известно, что $d_{(E_k,M)}(n) \geqslant \lceil \log_k n \rceil$. Говорят, что M обладает минимальным логарифмическим темпом роста, если выполняется $d_{(E_k,M)}(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \to \infty$. Известны критерии минимального логарифмического темпа роста в терминах предикатов и в терминах функций [2, 3].

Исследуется структура решетки замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста. Заведомо известно, что существуют не более чем счетные цепочки вложений замкнутых классов функций из P_2 с минимальным логарифмическим темпом роста. При этом можно взять не более пяти замкнутых классов функций из P_2 с минимальным логарифмическим темпом роста, чтобы ни один из них не был подмножеством другого [1].

В настоящей работе показано, что в k-значной логике, $k \geqslant 3$, существует континуальная цепочка вложений замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста. Также показано, что существует континуальное семейство попарно несравнимых замкнутых классов функций с минимальным логарифмическим темпом роста. Таким образом, решетка замкнутых классов функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста не отличается от полной решетки замкнутых классов функций многозначной логики ни в "длину", ни в "ширину".

Источники и литература

1) Комков С. А. Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, № 1. — С. 19–38.
2) Комков С. А. Новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2020. — № 5. — С. 60–62.
3) Комков С. А. О классах функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста // Дискретная математика. — 2019. — Т. 31, № 3. — С. 47–57.