Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Дистанционно регулярные накрытия полных графов и ассоциированные с ними шуровы схемы отношений

Научный руководитель – Циовкина Людмила Юрьевна

Циовкина Людмила Юрьевна

Кандидат наук

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: l.tsiovkina@gmail.com

Дистанционно регулярное антиподальное накрытие полного графа эквивалентно определяется как связный граф, множество вершин которого допускает разбиение на множество из n блоков одинакового размера $r \geq 2$ такое, что каждый блок индуцирует r-коклику, объединение любых двух различных блоков индуцирует совершенное паросочетание, и любые две несмежные вершины, лежащие в разных блоках, имеют ровно $\mu \geq 1$ общих соседей. Следуя [1], такой граф мы будем кратко называть (n, r, μ)-накрытием.

Одним из важнейших этапов исследования (n, r, μ)-накрытий является задача классификации (n, r, μ)-накрытий с транзитивными группами автоморфизмов. Как известно, каждый вершинно-транзитивный граф допускает теоретико-групповую характеризацию, а именно, он может быть построен по некоторой транзитивной группе подстановок как объединение ряда графов базисных отношений шуровой схемы отношений этой группы. Таким образом, возникает естественный вопрос: *как устроены шуровы схемы отношений, у которых объединение некоторого набора графов базисных отношений является (n, r, μ)-накрытием?*

Целью настоящей работы является исследование и классификация шуровых схем отношений, у которых граф некоторого базисного отношения является (n, r, μ)-накрытием (в случае, если это отношение не является симметричным, то под графом данного отношения мы имеем в виду его underlying граф). Отметим, что решение данной задачи предполагает описание класса реберно-транзитивных (n, r, μ)-накрытий, не являющихся реберно-симметричными, которые до сих пор практически не изучались.

Основные результаты работы представлены в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть Γ — недвудольное (n, r, μ)-накрытие и Σ — множество его антиподальных классов. Предположим, что Γ имеет реберно-транзитивную группу автоморфизмов G. Обозначим через K ядро действия группы G на Σ и через G^Σ — группу подстановок, индуцируемую группой G на Σ. Тогда G транзитивна на вершинах графа Γ и справедливы следующие утверждения:*

(1) *либо G^Σ действует 2-однородно, но не 2-транзитивно на Σ, $G^\Sigma \leq A\Gamma L_1(q)$ и $n = q \equiv 3 \pmod 4$, либо G^Σ действует 2-транзитивно на Σ;*

(2) *если $|K| = r$ и G^Σ действует 2-транзитивно на Σ, то G действует транзитивно на множестве дуг графа Γ;*

(3) *если $\mu > 1$, то либо G действует транзитивно на множестве дуг графа Γ, либо $|K| = r$, G^Σ действует 2-однородно, но не 2-транзитивно на Σ, и полный прообраз цоколя группы G^Σ в G действует регулярно на вершинах графа Γ.*

Теорема 2. *Пусть G — квазипростая транзитивная группа подстановок на множестве Ω, $\mathrm{Inv}(G) = (\Omega, \mathcal{R})$ — ее шурова схема отношений, $R \in \mathcal{R}$ и $\Gamma(R)^*$ — (неориентированный) граф на Ω, ребрами которого являются пары вершин $\{x, y\}$ такие, что $(x, y) \in R$. Предположим, что $\Gamma(R)^*$ — недвудольное (n, r, μ)-накрытие с $\mu > 1$. Тогда*

$R = R^T$ — симметричное отношение и либо $r > 2$ и $G \simeq L_2(q), U_3(q), SU_3(q), Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$, либо $r = 2$ и Γ — дистанционно-транзитивный граф Тейлора.

В работе также проведено полное описание схем $\mathrm{Inv}(G)$ из заключения теоремы 2 для случая $r > 2$ и найдены их числа пересечений. Как следствие, получена обобщенная конструкция реберно-симметричных (n, r, μ)-накрытий в т.н. почти простом случае как графов базисных отношений шуровых схем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00122).

Источники и литература

1) Godsil C.D., Hensel A.D., Distance regular covers of the complete graph, J. Comb. Theory Ser. B. 56 (1992) 205–238.