Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Об алгебраичности решеток ω-веерных формаций конечных групп

Научный руководитель – Сорокина Марина Михайловна

Максаков Серафим Павлович
Аспирант
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Брянск, Россия
E-mail: msp222@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется такая совокупность групп, которая с каждой своей группой содержит все группы ей изоморфные. Формация представляет собой класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Решеточные методы к исследованию формаций конечных групп впервые были применены А.Н. Скибой в 1986 году [5]. В дальнейшем они получили широкое распространение в работах многих алгебраистов (см., например, [3]). Целью настоящего исследования является изучение решеточных свойств ω-веерных формаций конечных групп.

Используемые обозначения и определения для групп, классов групп и решеток стандартны (см., например, [1], [4]). Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G. Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называется ωF-функцией (здесь символ ω' обозначает элемент, не принадлежащий ω); функция $\delta : \mathbb{P} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ называется $\mathbb{P}FR$-функцией. Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-веерной формацией с направлением δ (коротко, $\omega\delta$-веерной формацией) и с ω-спутником f [2]. Через δ_0 обозначается направление ω-полной формации, т.е. $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, где $\mathfrak{E}_{p'}$ — класс всех p'-групп [2]. Решеткой называется частично упорядоченное множество Θ, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge_\Theta y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee_\Theta y$ [1]. Элемент x решетки Θ называется компактным элементом, если для любого множества $\{y_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ из того, что $x \leq \vee_{\Theta_{i \in I}}(y_i)$ всегда следует, что существует такое конечное множество $\{y_j \mid j = 1, ..., s\} \subseteq \{y_i \mid i \in I\}$, что $x \leq \vee_{\Theta_{j=1,\dots,s}}(y_j)$ [1]. Решетка Θ называется алгебраической, если любой ее элемент a является решеточным объединением компактных элементов решетки Θ [1]. Пусть Θ — непустое множество формаций, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — Θ-формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$). Точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяют соответственно следующим образом: $\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 = \Theta form(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ — Θ-формация, порожденная множеством $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ [4]. Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция. Через $\omega\delta F$ обозначим множество всех $\omega\delta$-веерных формаций. В работе [7] установлено, что множество $\omega\delta F$ является решеткой.

Теорема 1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Тогда решетка $\omega\delta F$ является алгебраической.*

Концепция кратной локальности для формаций была введена А.Н. Скибой в 1987 году в работе [6]. В дальнейшем она была распространена на многие другие классы групп (см., например, [3]). Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Следуя [6], всякую формацию считают 0-кратно $\omega\delta$-веерной формацией; при $n \in \mathbb{N}$ $\omega\delta$-веерную формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно $\omega\delta$-веерной формацией, если она обладает ω-спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно $\omega\delta$-веерными формациями. Через $\omega\delta_n F$ обозначим множество всех n-кратно $\omega\delta$-веерных формаций.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ — $\mathbb{P}FR$-функция, удовлетворяющая условию $\delta_0 \leq \delta$. Тогда $\omega\delta_n F$ — алгебраическая решетка формаций.*

Источники и литература

1) Биркгоф Г. Теория решеток. Наука, Москва, 1984.
2) Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
3) Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. ВГУ имени П.М. Машерова, Витебск, 2012.
4) Скиба А. Н. Алгебра формаций. Беларуская навука, Минск, 1997.
5) Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5 // В кн. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 149–156.
6) Скиба А. Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1987. № 3. С. 21–31.
7) Maksakov S. P. On the lattices of the ω-fibered formations of finite groups // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1 (принята к печати).