Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Исчисление Ламбека с операциями следования и предшествования

Научный руководитель – Пентус Мати Рейнович

Пшеницын Тихон Григорьевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ptihon@yandex.ru

Исчисление Ламбека — логический формализм, введенный в Lambek 1958, применяемый для описания синтаксиса естественных языков. В данной работе вводится новое расширение данного исчисления — с помощью операций следования S и предшествования P; оно называется *исчислением Ламбека с операциями следования и предшествования* и обозначается в данной работе как $\mathrm{L}_{S,P}$. В работе изучаются различные аспекты нового исчисления: структурные свойства, распознающая сила грамматик и теоретико-модельные вопросы.

Типы исчисления определяются так: $Tp := Pr \mid (Tp\backslash Tp) \mid (Tp/Tp) \mid (Tp\cdot Tp) \mid S(Tp) \mid P(Tp)$. Секвенции имеют вид $\langle n\rangle A_1,\ldots,A_m \to A$, где A_j, A — типы, $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq 0)$, $m>0$. Число n является внутренним параметром секвенции.

Единственная аксиома $\mathrm{L}_{S,P}$ имеет вид $\langle 0\rangle p\to p,\quad p\in Pr$.

Правила имеют следующий вид (здесь $m,n\geq 0,\ k>0$):

$$\frac{\langle n\rangle\Gamma,B,\Delta\to C\qquad\langle m\rangle\Pi\to A}{\langle m+n\rangle\Gamma,\Pi,A\backslash B,\Delta\to C}\,(\backslash\to)\qquad\frac{\langle n\rangle A,\Pi\to B}{\langle n\rangle\Pi\to A\backslash B}\,(\to\backslash)$$

$$\frac{\langle n\rangle\Gamma,B,\Delta\to C\qquad\langle m\rangle\Pi\to A}{\langle m+n\rangle\Gamma,B/A,\Pi,\Delta\to C}\,(/\to)\qquad\frac{\langle n\rangle\Pi,A\to B}{\langle n\rangle\Pi\to B/A}\,(\to/)$$

$$\frac{\langle n\rangle\Gamma,A,B,\Delta\to C}{\langle n\rangle\Gamma,A\cdot B,\Delta\to C}\,(\cdot\to)\qquad\frac{\langle n\rangle\Gamma\to A\qquad\langle m\rangle\Delta\to B}{\langle m+n\rangle\Gamma,\Delta\to A\cdot B}\,(\to\cdot)$$

$$\frac{\langle k\rangle\Gamma,B,\Delta\to C}{\langle k-1\rangle\Gamma,S(B),\Delta\to C}\,(S\to)\qquad\frac{\langle n\rangle\Pi\to C}{\langle n+1\rangle\Pi\to S(C)}\,(\to S)$$

$$\frac{\langle n\rangle\Gamma,B,\Delta\to C}{\langle n+1\rangle\Gamma,P(B),\Delta\to C}\,(P\to)\qquad\frac{\langle k\rangle\Pi\to C}{\langle k-1\rangle\Pi\to P(C)}\,(\to P)$$

Примеры.

1) Секвенция $\langle 0\rangle p\to P(S(p))$ выводима, а секвенция $\langle 0\rangle p\to S(P(p))$ — нет. Отметим, что секвенция $\langle 0\rangle\Pi\to A$ может быть отождествлена с $\Pi\to A$ и что в соответствии с этим отождествлением исчисление Ламбека консервативно в $\mathrm{L}_{S,P}$.
2) $\mathrm{L}_{S,P}\vdash S(p\cdot q)\leftrightarrow S(p)\cdot q$, $\mathrm{L}_{S,P}\vdash P(p)\cdot q\to P(p\cdot q)$, но $\mathrm{L}_{S,P}\not\vdash P(p\cdot q)\to P(p)\cdot q$.
3) $\mathrm{L}_{S,P}\vdash P(p/q)\leftrightarrow p/S(q)$, $\mathrm{L}_{S,P}\vdash S(p/q)\to p/P(q)$, но $\mathrm{L}_{S,P}\not\vdash p/P(q)\to S(p/q)$.

Найдены примеры и других выводимых и невыводимых секвенций, объясняющие принципы работы операций S и P и описывающие их взаимодействие с остальными операциями.

Установлена теорема об устранимости сечения:

Теорема 1. В $\mathrm{L}_{S,P}$ допустимо правило сечения:

$$\frac{\langle m\rangle\Pi\to A\qquad\langle n\rangle\Gamma,A,\Delta\to B}{\langle m+n\rangle\Gamma,\Pi,\Delta\to B}\,(\mathrm{cut})$$

Исследован вопрос моделей, обобщено понятие полугруппы для операций S и P:

Определение 1. Полугруппа с делением и следованием — структура

$$RSS = \langle M, \circ, \leq, \backslash, /, \sigma, \pi \rangle, \text{ где}$$

- $\langle M, \circ, \leq, \backslash, / \rangle$ — полугруппа с делением;
- $\sigma(a \circ b) = \sigma(a) \circ b = a \circ \sigma(b)$ (ассоциативность);
- $a \leq b \Rightarrow \sigma(a) \leq \sigma(b)$ (монотонность);
- $\sigma(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq \pi(b)$ (residuated pair; см. Moortgat 1996).

Определение 2. Модель $\mathrm{L}_{S,P}$ на полугруппе с делением и следованием RSS — функция $w : Tp \to M$, такая, что

- $w(A/B) = w(A)/w(B)$;
- $w(B\backslash A) = w(B)\backslash w(A)$;
- $w(A \cdot B) = w(A) \circ w(B)$;
- $w(S(A)) = \sigma(w(A))$;
- $w(P(A)) = \pi(w(A))$.

Секвенция $\langle n \rangle A_1, \ldots, A_m \to A$ истинна в данной модели, если $w(S^n(A_1 \cdot \ldots A_n)) \leq w(A)$.
Теорема 2. Исчисление $\mathrm{L}_{S,P}$ корректно и полно относительно моделей на полугруппах с делением и следованием, причем существует универсальная модель.
Тем самым, показано, что новый вариант исчисления Ламбека основан на естественных алгебраических структурах.

Исследован вопрос определения и распознающей силы категориальных грамматик. Для работы с новым исчислением предлагается модифицировать понятие слова и называть обобщенным словом пару $(n; a_1 \ldots a_m) \in \mathbb{N} \times \Sigma^*$.
Определение 3. Категориальная грамматика над исчислением $\mathrm{L}_{S,P}$ — структура вида $\langle \Sigma, S, \triangleright \rangle$, где Σ — конечный алфавит, S — тип из $\mathrm{L}_{S,P}$, $\triangleright \subseteq \Sigma \times Tp$ — конечное бинарное отношение. Данная грамматика порождает язык обобщенных слов $(n; a_1 \ldots a_m)$, таких, что существуют типы $T_i \in Tp$, для которых выполняется $a_i \triangleright T_i$ и $\mathrm{L}_{S,P} \vdash \langle n \rangle T_1 \ldots T_m \to S$.

Из языка LG обобщенных слов путем их проецирования на вторую компоненту можно получить язык обычных слов; обозначим его $\pi_2(LG)$. Имеет место
Теорема 3. Существует категориальная грамматика над исчислением $\mathrm{L}_{S,P}$, задающая язык обобщенных слов LG, такой, что $\pi_2(LG) = \{a^n b^n c^k \mid n > 0, k \leq n\}$ (данный язык не контекстно-свободен).
Тем самым, теорема Пентуса для $\mathrm{L}_{S,P}$ не выполняется.