Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Свойства графа взаимной ортогональности Биркгофа-Джеймса

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Жилина Светлана Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Ортогональность Биркгофа-Джеймса – естественное продолжение понятия ортогональности в гильбертовом пространстве на произвольное нормированное пространство $\mathcal{X}$ над полем $\mathbb{F}$ вещественных или комплексных чисел. Она определяется следующим образом:

Определение 1. Элемент $x \in \mathcal{X}$ *ортогонален в смысле Биркгофа-Джеймса* элементу $y \in \mathcal{X}$, если $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Обозначение: $x \perp_{\mathrm{BJ}} y$.

Если $\dim \mathcal{X} \geq 3$, то, согласно [3, теорема 1], отношение $\perp_{\mathrm{BJ}}$ симметрично в том и только в том случае, когда $\mathcal{X}$ – гильбертово пространство. Таким образом, имеет смысл ввести следующее определение:

Определение 2. Элементы $x, y \in \mathcal{X}$ *взаимно ортогональны в смысле Биркгофа-Джеймса*, если $x \perp_{\mathrm{BJ}} y$ и $y \perp_{\mathrm{BJ}} x$. Обозначение: $x \perp\!\!\!\perp_{\mathrm{BJ}} y$.

Одним из актуальных направлений современной математики является изучение графов ортогональности различных алгебраических структур, см. библиографию работы [1]. Ранее были описаны графы взаимной строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса для коммутативных C^*-алгебр и для алгебры $\mathbb{B}(H)$ непрерывных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Определим граф ортогональности произвольного нормированного пространства $\mathcal{X}$, порождённый отношением $\perp\!\!\!\perp_{\mathrm{BJ}}$.

Определение 3. *Графом* $\Gamma(\mathcal{X})$ *взаимной ортогональности Биркгофа-Джеймса* называют граф, множество вершин которого – $\{[x] = \mathbb{F}^* x \mid x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}\}$, причём вершины $[x], [y]$ соединены ребром, если и только если $x \perp\!\!\!\perp_{\mathrm{BJ}} y$.

Целью данной работы является изучение компонент связности и клик в графах взаимной ортогональности Биркгофа-Джеймса. Основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\dim \mathcal{X} \geq 2n+1$. *Тогда для любых векторов* $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ *найдётся такой вектор* $y \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$, *что* $y \perp\!\!\!\perp_{\mathrm{BJ}} x_k$ *для всех* $k = 1, \ldots, n$.

Следствие 1. *Пусть* $\dim \mathcal{X} \geq 3$. *Тогда в* $\Gamma(\mathcal{X})$ *нет изолированных вершин.*

Следствие 2. *Пусть* $\dim \mathcal{X} \geq 5$. *Тогда диаметр* $\Gamma(\mathcal{X})$ *равен двум.*

Доклад основан на работе [2].

Источники и литература

1) Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina, *Orthograph related to mutual strong Birkhoff–James orthogonality in C^*-algebras*, Banach J. Math. Anal. **14** (4) (2020), 1751–1772.

2) Lj. Arambašić, A. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. Zhilina, *Symmetrized Birkhoff–James orthogonality in arbitrary normed spaces*, Preprint.

3) R. C. James, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559–566.