Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Некорректность базисной логики предикатов относительно сильного варианта строгой примитивно-рекурсивной реализуемости

Научный руководитель – Плиско Валерий Егорович

Коновалов Александр Юрьевич
Выпускник (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: alexandr.konoval@gmail.com

Понятие строгой примитивно-рекурсивной реализуемости было определено З. Дамняновичем [1]. В работе [2] В.Е. Плиско доказал, что интуиционистская логика предикатов некорректна относительно семантики строгой примитивно-рекурсивной реализуемости, тогда как базисная пропозициональная логика корректна. Мы покажем, что базисная логика предикатов BQC [3] некорректна относительно сильного варианта строгой примитивно-рекурсивной реализуемости.

Пусть $E_0 \subset E_1 \subset \ldots$ — иерархия примитивно-рекурсивных функций, описанная в [4]. При этом для каждого класса E_n имеется универсальная функция u_n, обладающая следующими свойствами: $\mathsf{u}_n \notin E_n$; $\mathsf{u}_n \in E_{n+1}$; $\mathsf{u}_n(e, 2^x) = \varphi(x)$ если e — номер одноместной функции $\varphi \in E_n$. Через I^n обозначаем множество всех номеров функций из E_n.

Согласно [1] определим отношение $e\ \mathbf{r}_i\ A$ (натуральное число e примитивно-рекурсивно реализует замкнутую арифметическую формулу A на i-ом уровне иерархии):

- $e\ \mathbf{r}_i\ A \rightleftharpoons e = 0$ и A истинна, если A — атомарная формула;
- $e\ \mathbf{r}_i\ \Phi \wedge \Psi \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}_i\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_i\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}_i\ \Phi \vee \Psi \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_i\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_i\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}_i\ \Phi \to \Psi \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}^i$ и $\forall j \geq i\, (\mathsf{u}_i(e, 2^j) \in \mathsf{I}^j)$, и $\forall a \forall j \geq i\, (a\ \mathbf{r}_j\ \Phi \Rightarrow \mathsf{u}_j(\mathsf{u}_i(e, 2^j), 2^a)\ \mathbf{r}_i\ \Psi)$.
- $e\ \mathbf{r}_i\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_i\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{r}_i\ \forall x\, \Phi(x) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}^i$ и $\forall a\, (\mathsf{u}_i(e, 2^a)\ \mathbf{r}_i\ \Phi(a))$.

Пусть f — n-местная функция из класса E_i. Согласно [2] распространим отношение $\mathbf{r}_i$ на секвенции арифметических формул:

$$f\ \mathbf{r}_i\ \Phi(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \Psi(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons \forall k_1, \ldots, k_n, e \forall j \geq i\, (e\ \mathbf{r}_j\ \Phi(\overline{k}) \Longrightarrow f(\overline{k}, e)\ \mathbf{r}_j\ \Psi(\overline{k})).$$

Секвенцию предикатных формул $A \Rightarrow B$ назовем сильно примитивно-рекурсивной реализуемой, если найдутся такие натуральные числа e и i, что имеет место $e\ \mathbf{r}_i\ A' \Rightarrow B'$ для любых арифметических примеров A' и B' предикатных формул A и B.

Теорема 1. *Секвенция $\forall x \forall x' (P(z, x) \to \exists y\, Q(z, x, y)) \Rightarrow \forall x\, (P(z, x) \to \exists y\, Q(z, x, y))$ не является сильно примитивно-рекурсивной реализуемой.*

Так как секвенция из теоремы 1 является аксиомой базисной логики предикатов BQC, исчисление BQC не является корректным относительно сильной примитивно-рекурсивной реализуемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00670.

Источники и литература

1) Damnjanovic Z. Strictly primitive recursive realizability // I. Journal of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59. p. 1210-1227.
2) Plisko V. Primitive recursive realizability and basic propositional logic // Utrecht University, Logic Group Preprint Series. 2007. Vol. 261. 27 pp.
3) Ruitenburg W. Basic predicate calculus // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1998. Vol. 39. N. 1. p. 18-46.
4) Axt P. Enumeration and the Grzegorczyk hierarchy // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Vol. 9. p. 53-65.