

Двумерная марковская модель согласования мнений

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Андреев Геннадий Андреевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: gtaandres@yandex.ru

Рассмотрим случайный вектор $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t)) \in \{0, 1, \dots, N\}^2$, который меняется в дискретные моменты времени $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{X}(t+1)$, $t = 0, 1, \dots$, согласно следующим правилам.

Если $X_1(t) < X_2(t)$, то мы можем либо увеличить (уменьшить) первую (вторую) координату вектора $\mathbf{X}(t)$ на единицу с вероятностью r_1 (соответственно r_2), либо оставить координаты без изменения. Аналогичным образом поступаем, если у нас событие $X_2(t) < X_1(t)$.

Если же $X_1(t) = X_2(t) \neq 0 (N)$, то мы можем либо изменить любую из координат вектора $\mathbf{X}(t)$ на единицу с вероятностью s_1 (соответственно s_2), либо оставить координаты без изменения с вероятностями соответственно $1 - 2s_1$ ($1 - 2s_2$).

Если $X_1(t) = X_2(t) = 0$, то можем либо увеличить любую из координат вектора $\mathbf{X}(t)$ на единицу с вероятностью s_1 (s_2), либо оставить без изменения с вероятностями соответственно $1 - s_1$ ($1 - s_2$).

Случай $X_1(t) = X_2(t) = N$, отличается заменой знака *плюс* на *минус*. Таким образом, мы определили цепь Маркова с множеством состояний $\mathbf{X}(t)$.

Построенную модель можно связать с изменением мнений двух людей. Соответственно координаты $X_1(t)$, $X_2(t)$ вектора $\mathbf{X}(t)$ можно сопоставить мнениям в момент времени t . Смысл определенной выше динамики в том, что, если мнения участников далеки, они стараются их сблизить. Опишем множество состояний построенной цепи.

Утверждение 1. Состояния (i, j) , i, j такие, что $|i - j| \leq 2$, $i, j \in [0, N]$ образуют неразложимый класс существенных сообщающихся состояний.

Таким образом, для последующих исследований удобно рассматривать данный класс. Всего получим $5N - 1$ существенных состояний. При этом изначально было $(N + 1)^2$, то есть мы значительно уменьшили число состояний для дальнейшего рассмотрения. Будем рассматривать сужение исходной цепи Маркова на наши $5N - 1$ состояний.

Утверждение 2. Новая цепь Маркова является эргодической.

Доказательство данного факта опирается на использование графа переходных вероятностей и классических теорем о конечных цепях Маркова [1, 2]. Таким образом, существует эргодическое распределение, и тем самым оно является единственным стационарным. Мы обсуждаем также зависимость стационарных распределений различных вариаций N и значений вероятностей r_1 , r_2 , s_1 , s_2 .

В будущем планируется обобщить полученные результаты на случай произвольного числа участников.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Маните А.Д. за постановку задачи и внимание к работе.

Источники и литература

- 1) Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей, Гл. ред. физ.-мат.лит., 1988
- 2) Ширяев А. Н. Вероятность, Издательство МЦНМО, 2007.