Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Распределение времени пребывания случайного блуждания в произвольной точке одномерной и двумерной решетки

Научный руководитель – Яровая Елена Борисовна

Апарин Александр Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: alxaparin@gmail.com

Рассматривается случайное блуждание с непрерывным временем на $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, которое задается матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x, y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, где $a(x, y) \geq 0$ при $x \neq y$, $a(x, x) < 0$ и $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x, y) = 0$ при всех x. Будем предполагать, что случайное блуждание *симметрично* ($a(x, y) = a(y, x)$), *пространственно однородно* ($a(x, y) = a(0, y - x)$), и *неприводимо*, т.е. для каждого вектора $z \in \mathbb{Z}^d$ существует такой набор векторов z_1, z_2, $\ldots z_k$, что $z = \sum_{i=1}^{k} z_i$ и $a(0, z_i) \neq 0$ при $i = \overline{1, k}$. Через $p(t, x, y)$ обозначим переходные вероятности случайного блуждания, которые выражаются через интенсивности (см. [2]). Предполагается, что случайный процесс является однородным по времени, т.е. соответствующая переходная вероятность за время $[s, t]$ совпадает с $p(t-s, x, y)$. В работе показано, что среднее время пребывая в точке y за время $t > 0$ при начальном положение x, будет интегралом от переходных вероятностей $p(t, x, y)$ на отрезке от 0 до t и обозначаем, как $G(t, x, y) = \int_0^t p(s, x, y)\, ds$. Если дополнительно предположить, что дисперсия скачков случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ конечна, т.е. $\frac{1}{a(0,0)} \sum_{x\neq 0} |x|^2 a(0, x) < \infty$, в этом случае переходная вероятность имеет асимптотическое представление $p(t, x, y) \sim \gamma_d/t^{\frac{d}{2}}$ при $t \to \infty$, где $\gamma_d > 0$ некоторая константа [2]. Получаем, что $\lim_{t\to\infty} G(t, 0, 0) = \infty$ и как показано в [1], [2] случайное блуждание возвратно в размерностях $d = 1, 2$.

Цель работы рассмотреть распределение времени пребывания случайного блуждания ξ_t в точке при $t \to \infty$.

В [3] Г. Каллианпур и Г. Роббинс получили функциональные предельные теоремы для одномерного и двумерного броуновского движения. Частично используя технику доказательств из работы [3] нами была получена теорема для симметричного случайного блуждания на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$.
Для $d = 1$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\xi_t}{\sqrt{\pi}\, G(t, 0, 0)} \leq x\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt, & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

а для d=2

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\xi_t}{G(t, 0, 0)} \leq x\right] = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. Яровой Е.Б. за постановку задачи и аспиранту кафедры теории вероятностей Попову Г.А. за ценные указания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Чжун Кай-Лай., *Однородные цепи Маркова*, М. Мир, 1964г.

[2] Яровая Е.Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Механико-Математический факультет МГУ, 2007.

[3] Kallianpur G., Robbins H., *Ergodic property of the Brownian motion process*, Communicated by J. von Neumann, April 16, 1953, 525-533.