Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Сходимость слабых жадных приближений по расширениям ортогональных словарей.

Научный руководитель – Лукашенко Тарас Павлович

Орлова Анастасия Сергеевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: Anastasia-Orlova1@yandex.ru

Жадные приближения — метод аппроксимации, активно изучаемый в последние годы [2]. В случае ортогонального словаря и чисто жадный, и ортогональный жадный алгоритмы обеспечивают на каждом шаге наилучшее n-членное приближение, по сути раскладывая приближаемый элемент в ряд Фурье, переупорядоченный по убыванию норм членов ряда. В случае неортогональных словарей наилучшее приближение, вообще говоря, не обеспечивается, но сходимость к приближаемому элементу гарантирована.

Модификации этих жадных алгоритмов, известные как “слабые”, рассматривают так называемые ослабляющие последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1]$. Члены этих последовательностей определяют степень снижения жесткости в условии, описывающем выбор элементов словаря на очередном шаге разложения. В случае ортогональных словарей сходимость к приближаемому элементу для этих модификаций жадных алгоритмов гарантируется, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ [1]. В общем же случае для гарантированной сходимости приходится накладывать более ограничительное условие на ослабляющую последовательность — расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n^2$ [2].

Указанная разница в достаточных условиях сходимости привела к следующему вопросу: гарантирует ли условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ сходимость слабых жадных разложений в случае словарей, являющихся расширениями ортогональных? Глобально расширение словаря улучшает или, как минимум, не ухудшает его аппроксимационные свойства, однако влияет на реализацию жадных алгоритмов.

Ответ на сформулированный вопрос — отрицательный даже в случае экстремальных расширений словаря. А именно, справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. В случае бесконечномерного пространства для словаря, совпадающего с единичной сферой, расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n^2$ является неослабляемым достаточным условием для сходимости слабого жадного и ортогонального слабого жадного алгоритмов.

Утверждение 2. Условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ перестает быть достаточным условием для сходимости слабых жадных алгоритмов уже в случае словарей, полученных из ортогонального добавлением одного элемента.

При этом, однако, если добавляемый элемент — финитный, то расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ остается достаточным условием сходимости.

Источники и литература

1) Орлова А.С. Скорость сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям // Вестник Моск. ун-та, Сер. 1. Матем. Механ. 2017. No. 2. С. 68-72.

2) Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. 12, No. 2-3. C. 213-227.