Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Теорема о жесткости самоаффинных дуг

Научный руководитель – Тетенов Андрей Викторович

Челканова Олеся Александровна

Аспирант

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия

E-mail: chelkanova_olesya@mail.ru

Жорданова дуга $\gamma \subset \mathbf{R}^n$ называется *самоподобной*, если существует такая система $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbf{R}^n$, что $\gamma = S_1(\gamma) \cup \ldots \cup S_m(\gamma)$. Условие, что дуга является самоподобной, определяем ряд ее необычных свойств. Например, в [2] было доказано следующее утверждение:

Пусть полугруппа $G(\mathcal{S})$, порожденная $S_1, ..., S_m$ содержит последовательность пар элементов $g_n, h_n \in G(\mathcal{S})$ такую, что пересечения $g_n^{-1}h_n(\gamma) \cap \gamma$ образуют последовательностью поддуг в γ, сходящуюся к γ. Тогда γ является прямолинейным отрезком.

С учетом этого свойства доказывается, что всякая самоподобная жорданова дуга γ является результатом итераций некоторой конечной ломаной, причем все вершины этой ломаной и ее образы на каждом шаге процесса итераций лежат в γ. Более того, если γ не является отрезком прямой, то никакая из ее поддуг не допускает взаимно однозначной проекции на отрезок прямой [3]. Эти результаты справедливы для жордановых дуг, порожденных системами сжимающих подобий. Открытым остается вопрос о распространении этих теорем на класс самоаффинных дуг, ситуация с которыми более сложна. Во-первых, самоаффинные жордановы дуги могут быть C_1 - гладкими. Например, множество гладких аффинных интерполяционных функций плотно в $C([0,1])$, а их графики естественно проецируются на отрезок $[0,1]$. С другой стороны, в работе [1] было доказано, что всякая C^2 - гладкая самоаффинная дуга является отрезком параболы. Мы рассматриваем более общую ситуацию – класс дуг, которые мы называем локально самоаффинными.

Дугу γ назовем *локально самоаффинной*, если для любой ее собственной поддуги $\gamma' \subset \gamma$ существует невырожденное аффинное отображение S, такое что $S(\gamma) \subset \gamma'$.

Жордановы дуги γ_1 и γ_2 имеют *правильное пересечение*, если $\gamma_1 \cap \gamma_2$ – дуга, один из концов которой является концом дуги γ_1, а другой — концом γ_2. Невырожденное аффинное отображение $g(x) = Ax + b$ пространства $\mathbf{R}^2$ мы назовем *аффинным сдвигом* жордановой дуги γ, если γ и $g(\gamma)$ имеют правильное пересечение, $\|A - E\| < 1/2$, а $g(x)$ не имеет неподвижных точек на γ.

Мы доказываем следующую теорему о жесткости самоаффинных дуг.

Теорема 1. *Пусть локально самоаффинная жорданова дуга $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ удовлетворяет одному из следующих условий:*
(i) Существует последовательность аффинных сдвигов f_k дуги γ, сходящаяся к тождественному отображению Id;
(ii) γ является аттрактором системы $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ сжимающих аффинных отображений, не удовлетворяющей слабому условию отделимости.
Тогда γ – отрезок параболы или прямой.

Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что дуга γ принадлежит классу C^2. Для этого мы доказываем, что каждый аффинный сдвиг f дуги γ можно вложить в однопараметрическую подгруппу $G_f = \{f^t, t \in \mathbf{R}\}$ группы аффинных отображений $\mathbf{R}^2$. Мы отмечаем, что орбиты точек $x \in \mathbf{R}^2$ относительно группы G_f являются кривыми класса гладкости C^∞. Это позволяет получить последовательность поддуг Λ_k класса C^∞, равномерно сходящуюся к некоторой поддуге $\gamma' \subset \gamma$ и тем доказать требуемую гладкость γ.

Источники и литература

1) C. Bandt, A. S. Kravchenko, Differentiability of fractal curves //Nonlinearity 24 (2011) 2717–2728
2) A. B. Тетенов. Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий// Сиб. матем. журнал. 2006 Т. 47, N. 5. С. 1147–1153
3) A. V. Tetenov, On Transverse Hyperplanes to Self-similar Jordan Arcs// Fractals, Wavelets, and their Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 92., pp.147–156. Springer, 2014 doi 10.1007/978-3-319-08105-2-8