Дифференциальная игра N $\geqslant 2$ лиц, в которой существует паретовское равновесие угроз и контругроз, но отсутствует равновесие по Нэшу

Мухина Юлия Сергеевна

Студент

Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: js.mukhina@mail.ru

***Научный руководитель** — Жуковский Владислав Иосифович, Бунина Елена Игоревна*

В докладе представлена дифференциальная позиционная линейно-квадратичная игра N $\geqslant$ 2 лиц, заданная упорядоченной четвёркой

$$\Gamma_N = \langle \mathbb{N}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathfrak{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$; фиксирован момент окончания игры $\vartheta = const > 0$, начало игры $t_0 \in [0, \vartheta)$, время продолжительности игры $t \in [t_0, \vartheta]$; управляемая система $\mathbf{\Sigma}$ линейна

$$\mathbf{\Sigma} \div \dot{x} = A(t)x + \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i,\ x(t_0) = x_0,$$

где фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$; пара $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — позиция игры, (t_0, x_0) — начальная позиция; *стратегию* i-того игрока U_i отождествляем с линейной по x n-вектор-функцией $u_i(t, x)$ $(U_i \div u_i(t, x))$ такой, что $u_i(t, x) = Q_i(t)x$, где $Q_i(\cdot)$ — $n \times n$-матрица с непрерывными на $[0, \vartheta]$ элементами, множество таких матриц обозначаем $\mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]$, итак, выбор своей стратегии i-тым игроком сводится к выбору непрерывной $n \times n$-матрицы $Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]$. Множество таких стратегий обозначаем через

$$\mathfrak{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]\}.$$

Используем далее *ситуацию* игры Γ_N — упорядоченный набор $U = (U_1, \ldots, U_N) \in \mathfrak{U} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{U}_i$ и Nn-вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$.

С течением времени игра «протекает» следующим образом: каждый из N игроков выбирает свою стратегию $U_i \in \mathfrak{U}_i$ (т.е. использует «свою» матрицу $Q_i(\cdot) \in \mathbb{C}_{n\times n}[0, \vartheta]$ с целью возможно увеличить свою функцию выигрыша (см. далее)); в результате образуется *ситуация* игры $U = (U_1, \dots, U_N) \div (Q_1(t)x, \dots, Q_N(t)x), U \in \mathfrak{U}$. Затем определяется решение $x(t)$ системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = [A(t) + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i(t)]x,\ x(t_0) = x_0$ с непрерывными на $[t_0, \vartheta]$ коэффициентами. По этому решению $x(t)$ определяем *реализацию* выбранной i-м игроком стратегии $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$, а также набор $u[t] = (u_1[t], \dots, u_N[t])$. *Функция выигрыша* i-го игрока задается квадратичным функционалом, определённым на множестве пар непрерывных вектор-функций $(x(t), u[t]),\ t \in [t_0, \vartheta]$ в виде

$$J_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} u_j'[t] D_{ij} u_j[t]\, dt\ (i \in \mathbb{N}),$$

в котором, не ограничивая общности, считаем симметричными постоянные $n \times n$-матрицы C_i и D_{ij}. Штрих сверху означает операцию транспонирования (x' — n-вектор-строка).

Широкое распространение в теории бескоалиционных дифференциальных игр получило решение игры — равновесие по Нэшу [1]. Однако равновесие по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым, что является негативом при его практическом использовании. Избежать последствий неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Но такое совпадение — явление скорее экзотическое (по крайней мере нам известно лишь три случая такого совпадения [3–4]). По этой причине предлагается рассмотреть *равновесие угроз и контругроз* [2].

В результате установлены *коэффициентные критерии*, при выполнении которых в игре Γ_N существует максимальное по Парето равновесие угроз и контругроз [2] и одновременно не существует ситуации равновесия по Нэшу, получен *явный вид решения* линейно-квадратичной дифференциальной игры $N \geqslant 2$ лиц.

Литература

1. Nash J. Equilibrium points in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci., USA, 1950, Vol. 36, P. 48–49.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
3. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. Case J. H. A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium // J. Optimiz. Theory Appl., 1974, Vol. 13, № 3, P. 378–385.