Дистанционные вложения 4-хроматических графов без треугольников в сферу

Неопрятная Анна Михайловна

Студент

Факультет МиКН АГУ, Майкоп, Россия

E-mail: anna.neo01@mail.ru

Научный руководитель — *Воронов Всеволод Александрович*

Рассматривается одна из задач, связанных с проблемой Нельсона-Хадвигера-Эрдёша: какое наименьшее число цветов потребуется для раскраски точек плоскости, при которой точки, находящиеся на евклидовом расстоянии 1, имеют разные цвета? Это число называют хроматическим числом плоскости и обозначают $\chi(R^2)$ [1,2]. Иными словами, $\chi(R^2)$ — это хроматическое число графа $G(R^2;1)$, вершинами которого являются точки R^2, а ребрами соединены точки, находящиеся на единичном евклидовом расстоянии.

Под хроматическим числом сферы $S^2(r)$ по аналогии со сказанным выше будем понимать хроматическое число графа $G(S^2(r);1)$, вершинами которого являются точки сферы радиуса r, а метрика индуцирована вложением в R^3. Все известные нижние оценки для $\chi(S^2(r))$ приведены в работе Симмонса [3].

Основным способом получения нижних оценок хроматического числа таких бесконечных графов является предъявление конечного подграфа $H \subset G(S^2(r);1)$; очевидно, для любого такого подграфа $\chi(G) \geq \chi(H)$.

Назовем $\varphi_r : V \to S^2(r)$ дистанционным вложением графа H в сферу $S^2(r)$, если отображение φ инъективно, и для каждого ребра $(u,v) \in E$ выполнено $\|\varphi_r(u) - \varphi_r(v)\| = 1$.

Пусть $R(H) \subset \mathbb{R}_+$ — множество всех радиусов сферы, для которых существует дистанционное вложение H в сферу $S^2(r)$.

Нечетным обхватом $g_{odd}(H)$ графа H называется длина кратчайшего нечётного цикла в этом графе. Если граф двудольный, полагаем $g_{odd}(H) = \infty$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\inf R(H) \geq (2\cos(\pi/(2g_{odd}(H))))^{-1}.$$

В работе [4] был построен пример 4-хроматического графа на 17 вершинах и было приведено его дистанционное вложение в плоскость. В докладе показано, что вложение этого графа в сферу позволяет улучшить оценку для хроматического числа сферы в некотором диапазоне радиусов.

Теорема 2. *Справедлива следующая оценка:*

$$\chi(S^2(r)) \geq 4, \quad r \in (r_0, \sqrt{3}/3),$$

$$r_0 = 0.5521.$$

Литература

1. Райгородский А. М. Хроматические числа. М.: МЦНМО. 2003.
2. Soifer A. The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators. Springer Science and Business Media, 2008.
3. Simmons G. J. The chromatic number of the sphere //Journal of the Australian Mathematical Society. 1976. T.21. №4. P. 473-480.
4. Exoo G., Ismailescu D. Small order triangle-free 4-chromatic unit distance graphs //Geombinatorics. 2016. T.26. P. 49-64.