Равновесие санкций и контрсанкций

Романова Виолетта Эдуардовна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: vilca2001@mail.ru

***Научный руководитель** — Жуковский Владислав Иосифович*

В сообщении представлена линейно-квадратичная игра $N \geq 2$ лиц – математическая модель, которая может проиллюстрировать распределение инвестиций между несколькими предпринимателями. Рассматривается бескоалиционная игра в нормальной форме, определенная упорядоченной тройкой

$$G_N = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N \geq 2\}$ — множество порядковых номеров игроков, каждый из которых выбирает свою *стратегию* $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (где символом $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, как обычно, обозначается k-мерное действительное евклидово пространство, элементами которого являются наборы из k действительных чисел, используется также евклидова норма $\|\cdot\|$ и скалярное произведение); в результате в игре G_N образуется ситуация $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i\in\mathbb{N}} n_i}$. На множестве X ситуаций x определена функция выигрыша $f_i(x)$ каждого i-го игрока:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j^{'} D_{ij} x_j + 2d_{ii}^{'} x_i \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Как правило, для нахождения решения игры чаще всего используется понятие равновесие по Нэшу [1], которое обладает важным свойством устойчивости. Именно: отклонение от решения отдельного игрока не должно увеличить выигрыш отклонившегося. Однако равновесие по Нэшу не обладает внешней и внутренней устойчивостью.

Так в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1, 2\},\ \{X_i = [-1, 1]\}_{i=1,2},\ \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество равновесных ситуаций по Нэшу будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e,\ x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\},$$

$$f_i(x^e) = \alpha^2 \ (i \in 1, 2).$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-ой и 3-ей четверти координатного угла), во-первых, для $x^{(1)} = (0, 0) \in X^e$ и $x^{(2)} = (1, 1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1, 2)$, и поэтому множество X^e *внутренне неустойчиво*, во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ $(i = 1, 2)$ и поэтому множество X^e *внешне неустойчиво*.

Внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу — негатив при его практическом использовании. В связи с этим предлагается *новое определение*, а именно *равновесие санкций и контрсанкций*, которое основывается на концепции угроз и контругроз [2]. Чтобы избежать внешней и внутренней неустойчивости, к определению было добавлено требование максимума по Парето.

В подтверждение вышесказанного приводится доказательство отсутствия в рассматриваемой игре равновесия по Нэшу и устанавливается существование равновесия угроз и контругроз, а также существование равновесия санкций и контрсанкций.

При нахождении решения данной линейно-квадратичной игры $N \geq 2$ лиц задача рассматривается с точки зрения двух разных концепций, которые так или иначе связаны. Различие этих концепций заключается как раз в различии самих понятий «угроза» и «санкция», «контругроза» и «контрсанкция». В первом случае игроку не имеет смысла применять угрозу, т.к. он не сможет увеличить свою функцию выигрыша из-за применения к нему возможной контругрозы другим игроком. Во втором случае демонстрируется, как должен вести себя игрок, когда на него уже «обрушивается» санкция.

В результате был получен *явный вид нового решения линейно--квадратичной игры $N \geq 2$ лиц* ((1) и (2)) — равновесие санкций и контрсанкций, которое максимально по Парето (и поэтому внутренне и внешне устойчиво), обладает свойством индивидуальной рациональности. При этом в игре G_N отсутствует равновесие по Нэшу.

Литература

1. Nash J. Equilibrium points in N-person games // Proc. Natl. Academ. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. С. 192.