О дискретных уравнениях в квадранте

Ходырева Анастасия Александровна

Аспирант

Институт ИиЦТ НИУ БелГУ, Белгород, Россия

E-mail: 711012@bsu.edu.ru

***Научный руководитель** — Васильев Владимир Борисович*

Мы изучаем дискретные аппроксимации для эллиптического псевдодифференциального уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

C— выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^2$, не содержащий целой прямой.

Если символ допускает волновую факторизацию относительно конуса C с индексом æ, то при $|æ - s| < 1/2$ уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(C)$. Для построения дискретных решений рассматривается дискретный аналог [1] уравнения (1)

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m \cap C, \quad h > 0 \tag{2}$$

в дискретных аналогах пространств $H^s(C)$.

Вопросы разрешимости дискретного уравнения (2) связаны со специальной задачей линейного сопряжения в пространстве аналитических функций, простейшую формулировку которой мы приведем для многомерного конуса. Пусть C^m – острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $T_{per}(C^m) \subset \mathbb{C}^m$ множество точек вида $z = x + iy, x \in \mathbb{T}^m, y \in C^m$. Введем пространство $A_+(\mathbb{T}^m)$ как подпространство $L^2(\mathbb{T}^m)$, состоящее из граничных значений аналитических в $T_{per}(C^m)$ функций, и определим пространство $A_-(\mathbb{T}^m)$ как прямое дополнение $A_+(\mathbb{T}^m)$ в $L^2(\mathbb{T}^m)$, так что $A_+(\mathbb{T}^m) \oplus A_-(\mathbb{T}^m) = L^2(\mathbb{T}^m)$. Формулировка многомерной периодической задачи Римана будет следующей: найти пару функций $\Phi^\pm \in A_\pm(\mathbb{T}^m)$, связанных почти всюду линейным соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}^m,$$

где $G(t), g(t)$ – заданные на $\mathbb{T}^m$ функции. В предположении, что символ $A_d(\xi)$ допускает специальную периодическую волновую факторизацию, связанную с областями $T_{per}(\pm C^m)$. Мы исследуем двумерный случай в более общих пространствах $H^s(C)$.

Такие дискретные уравнения в полупространстве исследовались в работах [1,2] , некоторые свойства дискретного оператора описаны в [3]. Однако в зависимости от индекса периодической волновой факторизации [1] уравнение (2) может иметь более одного решения, и тогда приходится к уравнению (2) добавлять дискретные граничные условия. Такая дискретная краевая задача служит аппроксимационной моделью для исходной непрерывной краевой задачи, и условия ее разрешимости аналогичны условиям разрешимости непрерывной задачи, что позволяет для малых h сравнивать дискретные и непрерывные решения.

Литература

1. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. V.23, No. 3. P. 492-506.
2. Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 18–27.
3. Васильев В.Б., Тарасова О.А. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.