Теоретические оценки погрешности аппроксимации конечно-объемных схем с реконструкциями на сетках специального вида

Бутаков Олег Борисович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: butakov@cs.msu.ru

Научный руководитель — *Мухин Сергей Иванович*

Консервативные конечно-объемные схемы высокого порядка точности являются, пожалуй, самым распространенным и надежным методом численного интегрирования гиперболических уравнений и систем. В таких схемах применяется процедура *реконструкции*, то есть восстановления значений искомой функции в узлах сетки или осреднения по граням из известных значений её осреднений по ячейкам расчетной сетки.

В работе [1] приводится классический алгоритм одномерной реконструкции функции, основанный на полиномиальной интерполяции её первообразной и последующем дифференцировании. Такой подход, к сожалению, затрудняет построение как погрешности реконструкции, так и разностной схемы в целом. В текущей работе рассматривается альтернативный подход, основанный на интерполяции интегрального осреднения и аппарате разделенных разностей Ньютона, который позволяет не только оценить погрешность реконструкции и разностной схемы в целом, но и вычислить значение постоянного множителя в этих оценках. В частности, на основе полученной формулы погрешности реконструкции

$$\psi_{i,i+1} = \left[D[x_{i-n_L-1/2},\ldots,x_{i+n_R+1/2}] \circ \int_{x_{i+1/2}}^{x} \frac{u(\xi)}{x-x_{i+1/2}}d\xi\right] \times$$
$$\times \prod_{j=i-n_L-1}^{i+n_R,\, j\neq i} (x_{i+1/2}-x_{j+1/2})$$

устанавливаются следующие оценки:

$$|\psi_{i,i+1}| \le h^{n_L+n_R+1} \cdot \frac{n_L!n_R!}{(n_L+n_R+2)!} \cdot \left\| \frac{\partial^{n_L+n_R+1} u}{\partial x^{n_L+n_R+1}} \right\|_C ,$$
$$|\bar{\psi}_i| \le h^{n_L+n_R+1} \cdot \frac{n_L!n_R!}{(n_L+n_R+2)!} \cdot \left\| \frac{\partial^{n_L+n_R+2} u}{\partial x^{n_L+n_R+2}} \right\|_C ,$$

где $\psi_{i,i+1}$ и $\bar{\psi}_i$ — погрешности реконструкции и аппроксимации конечно-объемной схемы для уравнения переноса на равномерной сетке с шагом h, в которых используется шаблон из ячеек с номерами $i - n_L, \ldots, i + n_R$.

Отдельный интерес представляют многомерные равномерные сетки. *Многомерной равномерной* будем называть сетку, составленную из ячеек одинаковой формы и размера, которая переходит в себя при переносе на отрезок, соединяющий геометрические центры двух соседних ячеек. Простейшим нетривиальным примером многомерной равномерной сетки является сетка, составленная из одинаковых скошенных шестигранников. В работе [2] устанавливается оценка точности схем с пространственным расщеплением на многомерных равномерных сетках в смысле конечно-разностного оператора проекции. В текущей работе с использованием предложенного подхода к построению реконструкции этот результат переносится на конечно-объемный случай.

Литература

1. Shu, C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report, 1997, № 97-65.
2. Бахвалов, П. А. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных на сетках из выпуклых многоугольников для решения задач аэроакустики // Матем. моделирование, 2013, Т. 25, № 9, С. 95–108.