О взаимосвязи слабых решений задач Дирихле и Неймана для многосвязной области

Боговский Антон Михайлович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: abogovski@gmail.com

***Научный руководитель** — Денисов Василий Николаевич*

Рассматриваются краевые задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа с однородными краевыми условиями в слабых постановках функциональных классов с первыми производными из $L_p(\Omega)$ для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ранее в [1] такая взаимосвязь между слабыми решениями задач Дирихле и Неймана была установлена лишь в случае односвязной $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. В докладе на примере плоской двусвязной области показан простой способ установления подобной взаимосвязи также и для многосвязных областей в $\mathbb{R}^2$.

Как известно (см., например, [1]), рассматриваемая слабая постановка задачи Неймана эквивалентна разложению пространства Лебега $\mathbf{L}_p(\Omega)$ векторных полей $\mathbf{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ в прямую сумму подпространств соленоидальных и потенциальных векторных полей $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ и $\mathbf{G}_p(\Omega)$, соответственно, где первое из двух подпространств определяется как замыкание в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ его подпространства $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых соленоидальных в Ω векторных полей. При этом, в силу известной теоремы де Рама, для любого открытого связного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ аннулятором подпространства $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega) \subset \mathbf{L}_p(\Omega)$ служит подпространство $\mathbf{G}_q(\Omega)$ всех потенциальных векторных полей в $L_q(\Omega)$ с сопряженным показателем $q = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$. Соответственно, аннулятором подпространства $\mathbf{G}_p(\Omega)$ будет подпространство $\mathring{\mathbf{J}}_q(\Omega)$ с тем же сопряженным показателем q. Из такой двойственности следует, как известно, что необходимым и достаточным условием справедливости разложения $\mathbf{L}_r(\Omega) = \mathring{\mathbf{J}}_r(\Omega) \oplus \mathbf{G}_r(\Omega)$ с каким-либо показателем $r = p \in (1, \infty)$ служит его справедливость с сопряженным показателем $r = p/(p-1)$.

Для любой многосвязной области связь между разрешающими операторами в стандартных слабых постановках задач Дирихле и Неймана уже не будет такой же простой, как в случае односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Детализация этой связи требует введения функционального пространства безихревых векторных полей, принципиально отличающегося от пространства потенциальных векторных полей для многосвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

По определению, пространство потенциальных векторных полей $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ совпадает с замыканием в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ его подпространства $\mathring{\mathbf{G}}^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}\colon \mathbf{v} = \nabla\varphi,\, \varphi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\}$ всех потенциальных векторных полей с финитными в Ω потенциалами. Пространство финитных бесконечно дифференцируемых безвихревых векторных полей, определенное как $\mathring{\mathbb{G}}^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathring{\mathbf{C}}^\infty(\Omega)\colon \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 = 0\}$, содержит не только подпространство всех потенциальных векторных полей $\mathring{\mathbb{G}}^\infty(\Omega)$ с финитными в Ω потенциалами, но еще и всех потенциальных векторных полей $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ с потенциалами, локально постоянными в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$.

Как и в [1] связь между разрешающими операторами краевых задач Дирихле и Неймана в слабых постановках с первыми производными из $L_p(\Omega)$ устанавливается в обе стороны с использованием линейной операции антисимметрической инволюции, опираясь на соответствующие разложения пространства $\mathbf{L}_p(\Omega)$ в соответствующие прямые суммы подпространств соленоидальных и потенциальных или безвихревых векторных полей.

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору кафедры ОМ факультета ВМК МГУ, д.ф.-м.н. В. Н. Денисову за внимание к работе и полезное обсуждение.

Литература

1. В. Н. Денисов, А. М. Боговский, О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области, Матем. заметки. 2020, Т. 107, Выпуск 1, С. 32–48.