

Оболочка Бебутова и устойчивость показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем

М. В. Федорова

Ижевск, Удмуртский государственный университет
e-mail: fedoro.masha2013@yandex.ru

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A_0(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция $A_0(\cdot)$ вполне ограничена [1], то есть при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует $A_0^{-1}(k)$, и найдется такое a_0 , что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0(k)\| \leq a_0, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0^{-1}(k)\| \leq a_0.$$

Систему (1) отождествим с функцией $k \mapsto A_0(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Обозначим $A_s(k) \doteq A_0(k+s)$ — сдвиг A_0 на $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(A_0)$ — замыкание множества $\{A_s(\cdot) : s \in \mathbb{N}\}$ в топологии, порожденной поточечной сходимостью на $\mathbb{N}$. Таким образом, $A \in \mathfrak{R}(A_0)$ в том и только том случае, когда существует неубывающая последовательность $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|A(k) - A_{s_j}(k)\| = 0$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что $A \in \mathfrak{R}(A_0)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $J = J(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство

$$\max_{k \leq \varepsilon^{-1}} \|A(k) - A_{s_j}(k)\| < \varepsilon.$$

Известно [2, р. 34], что $\mathfrak{R}(A_0)$ метризуемо в метрике

$$\rho(A, \hat{A}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \min\{\|A(k) - \hat{A}(k)\|, k^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(A_0), \rho)$ компактно [2, р. 34]. Это пространство называется *оболочкой Бебутова* функции $A_0(\cdot)$.

Каждый элемент $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ отождествим с линейной системой

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Пусть $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ — полный спектр показателей Ляпунова [3, с. 57] системы (2).

Определение. Полный спектр показателей Ляпунова системы (2) называется *устойчивым* [4], если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной функции $R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющей условию $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|R(k) - E\| < \delta$, полный спектр

$$\lambda_1(AR) \leq \lambda_2(AR) \leq \dots \leq \lambda_n(AR)$$

мультипликативно возмущенной системы

$$x(k+1) = A(k)R(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяет неравенствам

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1. Пусть полный спектр показателей Ляпунова системы (1) устойчив. Тогда для каждой матрицы $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ полный спектр показателей Ляпунова системы (2) устойчив.

Замечание. Ранее аналогичное утверждение было доказано в работе [5] для систем с интегральной разделенностью, то есть для систем с некрратным устойчивым полным спектром показателей Ляпунова. В этой работе было установлено, что если система (1) интегрально разделена, то для каждой матрицы $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ система (2) интегрально разделена. Теорема 1 усиливает этот результат. Предполагается использовать ее для решения задач управления асимптотикой решений линейных систем с дискретным временем.

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Sell G. Topological dynamics and ordinary differential equations (Series Van Nostrand Reinhold mathematical studies). New York, NY, USA: Van Nostrand, 1971.
3. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
4. Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 15–26.
5. Банщикова И.Н., Попова С.Н. Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 1. С. 122–132.