

Влияние первых интегралов и модели трения на переворот волчка Томсона

Е. Н. Пивоварова, А. А. Килин

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет

Рассматривается качение с проскальзыванием тяжелого неуравновешенного шара радиуса R и массы m с осесимметричным распределением масс по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. На систему действуют силы сопротивления качению, равнодействующая которых $\mathbf{F}$ приложена к точке контакта. Также на шар действует главный момент сопротивления качению $\mathbf{M}_f$, который включает в себя момент силы $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, но в общем случае может не быть ему равным. Мы полагаем, что качение шара по плоскости является безотрывным.

Уравнения Ньютона – Эйлера для изменения импульса и углового момента шара имеют вид

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{F} - mg\boldsymbol{\gamma}, \\ \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} &= N \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{I} = \text{diag}(i_1, i_1, i_3)$ — центральный тензор инерции шара, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость шара соответственно, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали к опорной плоскости, g — ускорение свободного падения, $N \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ и $N \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ — сила и момент силы реакции опорной плоскости.

При произвольной зависимости силы $\mathbf{F}$ и момента сил $\mathbf{M}_f$ от фазовых переменных можно указать ряд частных случаев существования интегралов движения рассматриваемой системы.

Предложение. Система (1) допускает дополнительный линейный по $\boldsymbol{\omega}$ интеграл движения при произвольной силе сопротивления качению $\mathbf{F}$ и следующих ограничениях на момент сопротивления качению $\mathbf{M}_f$:

1°. если $(\mathbf{M}_f, \mathbf{r}) = 0$, то сохраняется интеграл Джеллета

$$\mathcal{G} = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \text{const};$$

2°. если $(\mathbf{M}_f, \mathbf{e}_3) = 0$, то сохраняется интеграл Лагранжа

$$\mathcal{F} = i_3 \omega_3 = \text{const};$$

3°. если $(\mathbf{M}_f, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, то сохраняется интеграл площадей

$$\mathcal{C} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}.$$

Случаю существования интеграла Джеллета удовлетворяет, например, модель вязкого трения. Данная модель хорошо изучена и качественно объясняет переворот волчка Томсона [1,2].

Мы подробно анализируем случай существования интеграла площадей и показываем, что переворот при этом невозможен [3].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FEWS-2020-0009), а также поддержана РФФИ № 18-08-00999-а.

1. Rauch-Wojciechowski S., Sköldstam M., Glad T. Mathematical analysis of the tippe top, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, no. 4, pp. 333–362.
2. Karapetyan A. V. Global qualitative analysis of tippe top dynamics, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 342–348.
3. Kilin A. A., Pivovarova E. N. The Influence of the First Integrals and the Rolling Resistance Model on Tippe Top Inversion, подана в *Nonlinear Dynamics*.