

К ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Щелчков К.А.

Ижевск, Удмуртский Государственный Университет

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E с законами движения и начальными условиями:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{y} = v, \quad v \in U, \quad y(0) = y^0,$$

где U — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим $z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $z^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0, y^0\}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Условие поимки — $x_p(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $p, \tau > 0$.

В [1] показано, что поимка происходит тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$,

$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(v), \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geq 0, -\lambda z_i^0 \in -v + U\}.$$

Обозначим $\text{co}A$ — выпуклая оболочка множества A .

Теорема 1. Пусть $U = \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$, причём, для всех j , точки A_j являются крайними. Для того, что бы в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходила поимка необходимо и достаточно, что бы существовали множества $J_1, \dots, J_n$ такие, что

$$-z_i^0 \in \bigcap_{j \in J_i} C_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad J_1 \cup \dots \cup J_n = \{1, \dots, m\}.$$

Здесь, для каждого $i = 1, \dots, m$:

$$L_i = \{\xi \mid \xi = \sum_{j=1, \dots, m, j \neq i} \alpha_j (A_j - A_i), \quad \sum_{j=1, \dots, m, j \neq i} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \in [0, 1]\}, \quad C_i = \{\gamma \xi \mid \xi \in L_i, \gamma \geq 0\}.$$

Теорема 2. Пусть $m = k + 1$, $U = \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$. Тогда $\delta(z^0) = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} \frac{\lambda_i(A_j)}{k}$.

Теорема 3. Пусть U — выпуклый компакт с непустой внутренностью и $n = 2$. Тогда, для существования начальных положений z_1^0 и z_2^0 , из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование такого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, что для любой точки $w \in W(p)$ выполнено $\|D_{\max}(p, w) - D_{\min}(p, w)\| > 0$. При этом, поимка будет гарантирована если $z_1^0 = \alpha p$, $z_2^0 = -\beta p$, для некоторых $\alpha, \beta > 0$.

Здесь, для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ множество $W(p)$ определено следующим образом: $w \in W(p)$ если выполнены следующие условия:

- 1) $w \in \partial U$, где ∂U — граница множества U ;
- 2) существуют вектор $\|q\| = 1$, $(q, p) = 0$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $v \in U$, $(v, q) \leq \alpha$, $(w, q) = \alpha$.

Функции $D_{\max}(p, w)$, $D_{\min}(p, w)$ имеют вид:

$$D_{\max}(p, w) = w + p \cdot \max\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\}, \quad D_{\min}(p, w) = w + p \cdot \min\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\}.$$

Литература

- [1] Григоренко Н.Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1983. № 1. С. 41–47.