Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

КРИТЕРИЙ НЕЙРОПОРОЖДЁННОСТИ АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКОЙ

Научный руководитель – Боков Григорий Владимирович

Дробышев Александр Сергеевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории
интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru

Проблеме нейронных сетей сегодня уделяется большое внимание. В данной работе мы сосредоточимся на функциональных возможностях нейронных сетей. Первое описание поведения нейронных сетей было получено в 1943 году У. С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [2], позднее в 1956 году С. К. Клини [3] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В 2008 году С. В. Моисеев [1] не только показал, что не любой конечный автомат можно смоделировать нейронной сетью, но и доказал необходимые и достаточные условия, при которых это моделирование возможно.

Обозначим через $[\cdot]$ замыкание автоматных функций вида $f\colon A^\omega \to \{0,1\}^\omega$, где $A = \{0,1\}^n$, $n \geq 0$ относительно суперпозиции и обратной связи.

Отображение $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *пороговой функцией*, если найдутся такие $c_i \in \mathbb{Z}$, что $f(x_1,\ldots,x_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n \geq c_0$.

Нейроны — это автоматные функции вида $\mathfrak{Z}_c f$, где f — пороговая функция и $c \in \{0,1\}$. Множество всех нейронов обозначим через $\mathbf{N}$. Автоматные функции из класса $[\mathbf{N}]$ назовём *нейропорожденными*.

Перед нами стояла задача установить простые и легкопроверяемые условия нейропорождённости автоматной функции с задержкой. Для ее решения было определено понятие перестановочного отношения.

Отношение $R \subseteq Q \times A$ назовём *перестановочным*, если для любых $(q_1,a_1),\ (q_2,a_2) \in R$ либо $(q_1,a_2) \in R$, либо $(q_2,a_1) \in R$. Для автоматного задания $(A,Q,\{0,1\},\varphi,\psi,q_0)$ положим $A_q = \{a \in A \mid \psi(q,a) = 1\}$ и $R_a = \{\alpha \in A^* \mid \psi^*(\alpha a) = 1\}$.

Как результат работы была доказана теорема:

Теорема 1. *Для любого автомата $f : A^\omega \to \{0,1\}^\omega$ и любого его автоматного задания $(A,Q,\{0,1\},\phi,\psi,q_0)$, все состояния которого достижимы, следующие условия равносильны:*

1) *Автомат $\mathfrak{Z}_c f$ нейропорождён;*
2) *Отношение $\{(q,a) \in Q \times A \mid \psi(q,a) = 1\}$ перестановочно;*
3) *Множество $\{A_q \mid q \in Q\}$ линейноупорядочено по включению;*
4) *Множество $\{R_a \mid a \in A\}$ линейноупорядочено по включению;*
5) *Существуют такие регулярные множества $R_{a_1} \subseteq \cdots \subseteq R_{a_n}$, где $a_i \in A$, что $\mathcal{L}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} R_{a_i} \cdot \{a_i\}$;*
6) *Существуют перестановочное отношение $P \subseteq U \times A$ и такое семейство регулярных множеств $L_u, u \in U$, что*

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{u \in U} L_u \cdot \{a \in \ A \mid (u, a) \in P\}.$$

Источники и литература

1) *Моисеев С. В.* О реализации автоматов нейронными сетями // Интеллектуальные системы, т. 12 (1–4), 2008, pp. 283-–316.
2) *McCulloch W. S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys, vol. 5, 1943, pp. 115–133.
3) *Kleene S. C.* Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata // Automata Studies. Princeton University Press, 1956, pp. 3–42.