Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Выплаты по дивидендам перед парижским разорением для спектрально отрицательного процесса Леви

Научный руководитель – Булинская Екатерина Вадимовна

Шигида Борис Игоревич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: borshigida@gmail.com

Рассмотрим процесс Леви $\{X_t\}_{t\geq 0}$ на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$, где фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ удовлетворяет обычным условиям (то есть она непрерывна справа, а все множества нулевой вероятности принадлежат $\mathcal{F}_0$). Дополнительно будем предполагать, что этот процесс спектрально отрицательный, то есть не имеет скачков вверх: $\nu(0, \infty) = 0$, где ν — мера Леви данного процесса. В этом случае существует строго выпуклая функция $\psi(\lambda)$ такая, что

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda X_t}\right] = e^{t\psi(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0,$$

причём $\lim_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = +\infty$. Обозначив $\Phi(q)$ наибольших из (не более чем двух) корней уравнения $\psi(\lambda) = q$ для $q \geq 0$, введём функцию масштаба $W^{(q)}(x)$, которая определяется следующим образом. $W^{(q)}(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$, а при $x \in [0, \infty)$ это такая (единственная) непрерывная функция, что для $\beta > \Phi(q)$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}.$$

Для удобства вместо $W^{(0)}$ будем писать просто W.

Также введём экспоненциальную замену меры: P_x^c — это такая вероятностная мера, что

$$\left.\frac{d\mathsf{P}_x^c}{d\mathsf{P}_x}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{c(X_t - x) - \psi(c)t}, \quad t \geq 0.$$

Здесь для удобства $\mathsf{P}_x\{\cdot\} = \mathsf{P}\{\cdot | X_0 = x\}$.

С помощью определённых функций можно решать различные задачи, связанные с функционированием страховой компании, капитал которой моделируется процессом $\{X_t\}$. Например, обозначим $T_{0,d}^-$ момент *парижского разорения*, которое происходит, когда капитал находился ниже нуля в течение как минимум d единиц времени. Как показано в [1], вероятность того, что парижское разорение с параметром d никогда не произойдёт, выражается следующим образом:

$$\mathsf{P}_x\left\{T_{0,d}^- = \infty\right\} = \mathsf{E}\left[X_1\right] \frac{\int_0^\infty W(x+y) y \mathsf{P}\left\{X_d \in dy\right\}}{\int_0^\infty y \mathsf{P}\left\{X_d \in dy\right\}}.$$

Нас интересует более подробная метрика производительности страховой компании. А именно, мы рассматриваем модифицированный процесс $U_t = X_t - L_t$, который учитывает выплату страховой компанией дивидендов L_t по следующей стратегии: когда её капитал U_t продержался выше некоторого барьера b как минимум h единиц времени, разница $U_t - b$ выплачивается в качестве дивидендов (и капитал возвращается на уровень b). Это барьерная стратегия выплаты дивидендов с парижской задержкой. Функции масштаба позволили найти ожидаемые дисконтированные дивиденды перед обычным разорением U_t (то есть парижским разорением с нулевым параметром $d = 0$) в работе [2]. Мы же находим ожидаемую сумму всех дисконтированных выплат по дивидендам в данной стратегии перед парижской задержкой (d произвольное неотрицательное).

Также мы рассматриваем пример конкретного вида процесса X_t:

$$X_t = ct + \sigma W_t - \sum_{i=1}^{N_t} C_i, \quad t \geq 0,$$

где $c > 0$, W_t — стандартный винеровский процесс, $\sum_{i=1}^{N_t} C_i$ — составной пуассоновский процесс с экпоненциальными скачками. Мы проводим симуляцию этого процесса и исследуем все интересующие нас величины численно.

Источники и литература

1) R. Loeffen, I. Czarna, and Z. Palmowski. Parisian Ruin Probability for Spectrally Negative Lévy Processes. Bernoulli. 19 (2011). doi:10.3150/11-BEJ404.

2) I. Czarna and Z. Palmowski. Dividend Problem with Parisian Delay for a Spectrally Negative Lévy Risk Process. Journal of Optimization Theory and Applications. 161 (1), 239–256 (2014). doi:10.1007/s10957-013-0283-y.