Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Математические модели социальной динамики с ограниченным доверием и случайным шумом

Научный руководитель – Манита Анатолий Дмитриевич

Болычев Антон Владимирович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: bolychev.anton@gmail.com

Мы будем рассматривать стохастическую модель с дискретным временем $t = 0, 1, 2, \ldots,$ состоящую из N взаимодействующих частиц в пространстве $\mathbb{R}^d$. Общее состояние процесса мы будем обозначать как $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))^T$, где $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$ (т. е. $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{N\times d}$). Эволюцию процесса определим правилом перехода $\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow \boldsymbol{x}(t+1)$. Данное правило заключается в синхронизации частиц, в результате которой каждая координата $x_i(t)$ становится равной среднему арифметическому координат частиц $x_k(t)$, лежащих в *окрестности доверия* $O(x_i(t))$, с последующим прибавлением случайного шума. Окрестностью доверия $O(x_i(t))$ мы называем замкнутый евклидов ε-шар в $\mathbb{R}^d$ ($\varepsilon = \mathrm{const}$) с центром в точке $x_i(t)$. В формальных обозначениях предлагаемая к изучению модель социальной динамики выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathcal{P}_{\boldsymbol{x}(t)}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

где $\{\boldsymbol{\xi}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ — независимые одинаково распределённые $\mathbb{R}^{N\times d}$ -мерные случайные величины (*случайный шум*), $\boldsymbol{x}_0$ — произвольный и детерминированный вектор в $\mathbb{R}^{N\times d}$ и $\mathcal{P}_{\boldsymbol{x}(t)}\boldsymbol{x}(t)$ — синхронизированный вектор частиц $\boldsymbol{x}(t)$. Здесь $\mathcal{P}_{\boldsymbol{u}}$ — это матрица, зависящая от своего нижнего аргумента следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\rho_{ij}^{\varepsilon}(\boldsymbol{u})}{\sum_{j=1}^{N}\rho_{ij}^{\varepsilon}(\boldsymbol{u})}\right)_{i,j=1}^{N}, \text{ где } \rho_{ij}^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{1}_{\{\|u_i-u_j\|\le\varepsilon\}}, \quad \boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)^T, \quad u_i \in \mathbb{R}^d$$

Показано, как преобразуется распределение вектора $\boldsymbol{x}(t)$ в результате синхронизации $\mathcal{P}_{\boldsymbol{x}(t)}\boldsymbol{x}(t)$. Данную синхронизацию можно свести к серии линейных преобразований и изучить каждое в отдельности с помощью SVD-разложения (см. [1]).

Кроме того, рассмотрено поведение разброса конфигурации, который контролируется с помощью $V(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{i<j}\|x_i(t) - x_j(t)\|^2$. Для $N = 2$ описано распределение $x_1(t) - x_2(t)$ и получены достаточные условия расходимости матожидания $\mathsf{E}V(\boldsymbol{x}(t)) = \mathsf{E}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2$, которое при данных условиях имеет линейную асимптотику. При $N = 3$ для $\mathsf{E}V(\boldsymbol{x}(t))$ доказаны аналогичные результаты.

Данная задача мотивирована математическими моделями социальной динамики [2, 3], многочисленные модификации которой активно изучаются в настоящее время (см., например, [4, 5] и ссылки в [5]).

Источники и литература

1) Horn, R.A., Johnson, C.R. (2012). Matrix Analysis. Cambridge University Press, 2nd edn.

2) Hegselmann, R., Krause, U. (2002). Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. Journal of artificial societies and social simulation, 5(3).

3) Krause, U. (2000). A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation. Communications in difference equations, 2000, 227-236
4) Manita, A., Manita, L. (2018). Distributed Time Synchronization Algorithms and Opinion Dynamics. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 955, No. 1).
5) Noorazar, H., Vixie, K.R. et al. (2019). From classical to modern opinion dynamics. arXiv:1909.12089.