Реализация грубых молекул интегрируемыми биллиардами

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Харчева Ирина Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: irina_harcheva@mail.ru

Рассмотрим некоторую компактную область Ω в плоскости с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. Тогда *биллиардом в области* Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω. У биллиарда есть один первый интеграл – гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, биллиард является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости биллиарда необходим еще один первый интеграл. Важным классом интегрируемых биллиардов является биллиард в области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Оказывается, в таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике – фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл Λ, независимый с предыдущим – параметр каустики. Это означает, что биллиард в такой области будет интегрируем по Лиувиллю.

Для динамических систем, интегрируемых по Лиувиллю, определены комбинаторные инварианты Фоменко-Цишанга: атомы, грубые и меченые молекулы (см. [1]). Атомы описывают локальную перестройку торов Лиувилля. Грубые молекулы двух систем позволяют определять, одинаковые ли у них базы слоений Лиувилля или нет, меченые молекулы – одинаковы ли сами слоения Лиувилля. Итак, для биллиарда в области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол, можно вычислить инварианты Фоменко-Цишанга и сравнить его с другими системами, интегрируемыми по Лиувиллю (см. [2]).

На докладе будет рассмотрен обратный вопрос. Пусть дана грубая молекула. Можно ли сконструировать такой биллиард (или его обобщение), для которого грубая молекула совпадет с изначально заданной? Оказывается, можно построить такое обобщение биллиарда (биллиардную книжку), что для него ответ на этот вопрос будет положительным.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-01-00775а).

Источники и литература

1) Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
2) Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами / Фокичева В. В. // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. - 2014. - № 4. С. 18-27.