Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Исследование бифуркаций автоколебательных решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием

Научный руководитель – Кубышкин Евгений Павлович

Куликов Владимир Александрович

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: kulikov7677@gmail.com

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho,\phi,t)+u(\rho,\phi,t)=D\Delta_{\rho\phi}u(\rho,\phi,t)+K(1+\gamma cos(u_\theta(\rho,\phi,t-T))) \quad (1)$$

относительно функции $u(\rho,\phi,t+s)$, заданной в полярных координатах $0\leq\rho\leq R, 0\leq\phi\leq 2\pi$ $(R>0)$ и $t\geq 0, -T\leq s\leq 0$ $(T>0)$, в котором $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, $u_\theta(\rho,\phi,t)\equiv u(\rho,(\phi+\theta)mod(2\pi),t)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ – оператор поворота пространственного аргумента, D,K – положительные постоянные, $0<\gamma<1$, в области $\bar{K}_R\times\mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R=\{(\rho,\phi): 0\leq\rho\leq R, 0\leq\phi\leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+=\{t: 0\leq t<\infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_\rho(R,\phi,t)=0,\quad u(\rho,0,t)=u(\rho,2\pi,t),\quad u_\phi(\rho,0,t)=u_\phi(\rho,2\pi,t),$$

$$u(\rho,\phi,t+s)|_{t=0}=u_0(\rho,\phi,s)\in H_1(K_R;-T,0). \quad (2)$$

В (2) пространство начальных условий $H_1(K_R;-T,0)=\{u(\rho,\phi,s): u(\rho,\phi,s)\in C(\bar{K}_R\times[-T,0]), u(\rho,0,s)=u(\rho,2\pi,s)$, при каждом s $u(\rho,\phi,s)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(K_R)\}\}$, где пространство функций $\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(K_R)\}$ получено замыканием множества функций $\{u(\rho,\phi): u(\rho,\phi)\in C^1(\bar{K}_R), u_\rho(R,\phi)=0, u(\rho,0)=u(\rho,2\pi), u_\phi(\rho,0)=u_\phi(\rho,2\pi)\}$ в метрике пространства функций $W_2^1(K_R)$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1)-(2) является пространство $H(K_R;-T,0)=\{u(\rho,\phi,s): u(\rho,\phi,s)\in L_2(K_R)$ при каждом $-T\leq s\leq 0, ||u(\rho,\phi,s)||_{L_2}\in C([-T,0])\}$, норму в котором определим как $||u(\rho,\phi,s)||_H=\max_s||u(\rho,\phi,s)||_{L_2}$. Областью определения правой части уравнения (1) является пространство $H_1(K_R;-T,0)$, при этом оператор $\Delta_{\rho\phi}$ считаем симметрично расширенным на пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(K_R)$. Норму в $H_1(K_R;-T,0)$ определим как $||u(\rho,\phi,s)||_{H_1}=\max_s||u(\rho,\phi,s)||_{W_2^1}$.

Под решением начально-краевой задачи (1)-(2), определенным при $t>0$, будем понимать функцию $u(\rho,\phi,t+s)\in H_1(K_R;-T,0)$ (при каждом $t>0$), непрерывно дифференцируемую по t при $t>0$, обращающую уравнение (1) в тождество и удовлетворяющую начальным условиям (2).

В работе исследована динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров уравнения (1). В плоскости основных параметров управления (коэффициента усиления K и угла поворота θ) с использованием метода D-разбиений и его специальной параметризации построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Исследована динамика областей устойчивости в зависимости от величины запаздывания и других параметров начально-краевой задачи. Изучены возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия.

С использованием метода центральных многообразий и теории бифуркаций исследованы возможные бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений, а также их устойчивость. Изучена динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости управляющих параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19 31 90133).