Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Рациональные дифференциально-разностные операторы Дункла-Дарбу

Научный руководитель – Хэкало Сергей Павлович

Политов Кирилл Олегович

Аспирант

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия

E-mail: mr.politov.k@gmail.com

Дифференциально-разностные операторы Дункла рационального типа введены в работе [5] (см. также [1], [4]). В связи с изучением общих свойств гамильтонианов моделей Калоджеро в работе [6] введены «универсальные» операторы Дункла. «Универсальные» операторы, в отличии от классических рациональных, не коммутируют, и сумма их квадратов имеет более сложный вид. В работах [2], [3] изучены многообразия, на которых обобщения операторов Дункла сохраняют свойства рационального оператора.

Мы вводим в рассмотрение общие рациональные операторы Дункла-Дарбу, для которых операторы, определенные в работах [1], [4], [5] являются частным случаем.

Пусть s_α, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — оператор отражения относительно гиперплоскости, ортогональной вектору α, действующий на вектор $x \in \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$s_\alpha x = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Пусть также $\mathcal{R}$ — система корней в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_+$ — её положительная часть; k_α — целозначная неотрицательная функция на $\mathcal{R}$, инвариантная относительно отражений: $k_{s_\beta \alpha} = k_\alpha, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$; $L_k(t)$ — вещественнозначная нечетная функция на $\mathbb{R}$, зависящая от целочисленного параметра k.

Обозначим через $\mathcal{F} = \{f : x \to f(x) \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n\}$ множество функций, на котором корректно определены действия операторов отражения

$$s_\alpha[f](x) \stackrel{\text{def}}{=} f(s_\alpha^{-1}x) = f(s_\alpha x), \forall \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

и взятия производной $\partial_\xi[f](x) = (\partial_\xi f)(x)$ по направлению $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Оператор вида

$$\nabla_\xi = \partial_\xi - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} (\alpha,\xi) L_{k_\alpha}\left((\alpha,x)\right) s_\alpha,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

действующий на пространстве функций $\mathcal{F}$, назовем оператором Дункла-Дарбу рационального типа.

Определение 2. Многообразие, определяемое равенством

$$\sum_{\alpha,\beta \in \mathcal{R}_+, \alpha \neq \beta} (\alpha,\beta) L_{k_\alpha}((\alpha,x)) L_{k_\beta}((\beta,x)) s_\beta s_\alpha = 0,$$

назовем многообразием Бете-Дункла.

На многообразии Бете-Дункла операторы Дункла-Дарбу (1) коммутируют. При этом оператор $\mathcal{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} \nabla_i^2$, где $\nabla_i = \nabla_{e_i}$, e_i — i-ый вектор ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$, имеет вид

$$\Delta - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} (\alpha, \alpha) \left[L'_{k_\alpha}(t) - L^2_{k_\alpha}(t) s_\alpha \right]\Big|_{t=(\alpha,x)} s_\alpha.$$

Источники и литература

1) Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // УМН. 1994. Т. 49 № 6(300) С. 5-–77.

2) Мещеряков В. В. Универсальные операторы Данкла // УМН. 2009 Т. 64 № 1(385) С. 155—156.

3) Политов К. О. Многообразия Бете и Дункла, ассоциированные с операторами Дункла-Дарбу // Современные методы краевых задач: Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXX. Воронеж. 2019. С. 229–230

4) Хэкало С. П. Дифференциально-разностные операторы Дункла–Дарбу // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81 № 1 С. 161—182.

5) Dunkl C. F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Т. 311 № 1 P. 167–183.

6) Golubeva V. A., Leksin V. P. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models // J. Math. Sci. 2000. Т. 98 № 3 P. 291–318.