Асимптотика фундаментальной системы решений семейства вырождающихся дифференциальных уравнений

Емельянов Дмитрий Павлович

Магистрант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: wpgrussia@gmail.com

Научный руководитель — *Ломов Игорь Сергеевич*

Рассматривается последовательность вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ly(x) = xy'' + c(x)y' - (a(x) + \pi^2 k^2)y = 0, x \in (0, b), k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Данная последовательность возникает, например, при разделении переменных в задаче Дирихле для следующего уравнения с частными производными

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)y = f(x, y), (x, y) \in D = (0, 1) \times (0, b). \quad (2)$$

Коэффициенты $a(x), c(x)$ полагаются аналитическими функциями в комплексном круге $U = \{x \in \mathbb{C} : |x| < R\}, R > b$. Коэффициент $a(x)$ при этом является не отрицательным на отрезке $[0, b]$ исследования дифференциальных уравнений.

Положим первым элементом ФСР решение следующей задачи

$$\begin{cases} Ly_{1,k}(x) = 0, x \in (0, b), k \in \mathbb{N}, \\ y_{1,k}(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве второго элемента $y_{2,k}(x)$ можно взять решение, имеющее асимптотику $O^*(x^{1-c_0})$ в нуле ($O^*(\ln x)$ в случае $c_0 = 1$).

Будет показано, что имеют место следующие асимптотики

$$\begin{gathered} y_{1,k}(x) = O\left(\frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{(i\pi k\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2i\pi k\sqrt{x})\right), \\ y_{2,k}(x) = O\left(x^{1-c_0}\frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{(i\pi k\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2i\pi k\sqrt{x})\right), c_0 \neq 1, \\ y_{2,k}(x) = O\left(\ln x\frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{(i\pi k\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2i\pi k\sqrt{x})\right), c_0 = 1. \end{gathered} \quad (4)$$

Здесь $c_0 = c(0), a_0 = a(0), i$ – мнимая единица, $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя первого рода, $\alpha = c_0 - 1$ если $c_0 \geq 1$, $\alpha = 1 - c_0$ если $c_0 < 1$. Асимптотики равномерные по $x \in [0, b]$. Аналогичные оценки имеют место снизу всюду, за исключением сколь угодно малых окрестностей концов отрезка.

Литература

1. Келдыш М. В. Избранные труды. Математика. М.: Наука. 1985. — 448 стр.
2. Емельянов Д. П., Ломов И. С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 45–58.