О классах многозначных функций с минимальным логарифмическим темпом роста

Научный руководитель – Часовских Анатолий Александрович

Комков Степан Алексеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: polkachxd@rambler.ru

Пусть имеется множество A с множеством операций M. Элементы декартова произведения A^n называются наборами. Через $d_{(A,M)}(n)$ обозначается такое минимальное число, что всё A^n может быть сгенерировано с помощью $d_{(A,M)}(n)$ наборов операциями из M, где операции применяются к наборам поэлементно. Функция $d_{(A,M)}(n)$ называется темпом роста.

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $M = \{\neg\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $M = \{\oplus\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = n$.

Таким образом, темп роста — естественная комбинаторная величина, характеризующая силу и исчислимость множества операций.

Важность темпа роста была показана Хьюби Ченом [1]. Оказалось, что количественная задача удовлетворения ограничений (QCSP) может быть полиномиально понижена до обычной задачи удовлетворения ограничений (CSP) для множеств с не более чем полиномиальным темпом роста.

В работе получен критерий минимального логарифмического темпа роста для произвольного конечного множества с заданным множеством операций, а именно, описание всех таких пар (A, M), где A — конечное множество, а M — замкнутое множество операций на этом множестве, что $d_{(A,M)}(n) - \log_{|A|} n = O(1)$ при $n \to \infty$:

Теорема 1. *$d_{(A,M)}(n) - \log_{|A|} n = O(1)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда не найдется важного предиката $\rho \in \mathrm{Inv}(M)$. Причём, если правая часть верна, то $\left| d_{(A,M)}(n) - \log_{|A|} n \right| \leqslant |A| + 1$ для любого n.*

Нетождественный предикат ρ без несущественных переменных называется важным, если $\rho(x_1, \ldots, x_n) = 1 \ \forall \ x_1 = \ldots = x_n = a \in A$, и найдется столбец, принадлежащий предикату, который содержит не менее двух различных элементов.

Источники и литература

1) Chen H., "Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property", *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, 197–208.