Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Численное решение краевой задачи с дробной производной по времени и квазилинейным эллиптическим оператором

Научный руководитель – Лапин Александр Васильевич

Левинская Ксения Олеговна

Студент (бакалавр)

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: sisina.kseniya@yandex.ru

Рассматривается однородная краевая задача Дирихле:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha y - \dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x,t)\, g(\dfrac{\partial y}{\partial x})\big) = f(x,t), \text{ в } Q = (0,1)\times(0,T] \\ \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad y(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{D}_t^\alpha y(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\frac{\partial y}{\partial s}(s)ds, \quad (0<\alpha<1)$ – дробная производная Капуто, $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

$$a(x,t) \text{ непрерывна в } \bar{Q}, \quad 0 < a_0 \leqslant a(x,t) \leqslant a_1, \quad \forall (x,t)\in\bar{Q}; \tag{2}$$

функция $g(p):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ сильно монотонна и Липшиц-непрерывна:

$$(g(p)-g(q))(p-q) \geqslant g_0(p-q)^2, \quad g_0>0; \tag{3}$$

$$|g(p)-g(q)| \leqslant g_1(p-q). \tag{4}$$

Для задачи (1) строится конечно-разностная схема на равномерной сетке с шагами τ по t и h по x. Для непрерывной функции $y(t)$ так называемая $L1$-аппроксимация производной Капуто получается в результате ее замены непрерывной и кусочно-линейной функцией. В результате:

$$\mathcal{D}_t^\alpha y(t_k) \approx \partial_t^\alpha y(t_k) = d_1 y^k + \sum_{j=1}^{k-1}(d_{j+1}-d_j)y^{k-j}, \quad \text{при} \quad t_k = k\tau,$$

где $y^j = y(t_j)$, а $d_j = \dfrac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha}\right)$. Эллиптическая часть уравнения аппроксимируется в точке сетки (x,t_k) выражением $A_k y = -\dfrac{1}{2}\bar{\partial}(a(x,t_k), g(\partial y)) - \dfrac{1}{2}\partial(a(x,t_k), g(\bar{\partial}y))$, где ∂y и $\bar{\partial}y$ — правая и левая конечные разности, соответственно.

В результате получается неявная сеточная схема:

$$d_1 y^k + A_k y^k = f^k - \sum_{j=1}^{k-1}(d_{j+1}-d_j)y^{k-j}, \qquad k = \overline{1,N_t}. \tag{5}$$

Теорема 1. *a) В условиях (2) - (4) задача (5) имеет единственное решение.*

b) Если $y_i^k, i=1,2,$ – решения задачи (5) с правыми частями $f_i^k, i=1,2,$ то справедливо следующее неравенство устойчивости:

$$\sum_{k=1}^{N_t} \|y_1^k - y_2^k\|^2 \leqslant M \sum_{k=1}^{N_t} \|f_1^k - f_2^k\|^2,$$

где $\|y\|^2 = (y, y) = \sum\limits_{i=1}^{N_x - 1} y_i^2$, *а постоянная* M *зависит лишь от* T, a_0 *и* g_0, N_x*—число внутренних точек сетки по* x.

Пусть $Ry = -\partial\bar{\partial}y$ – аппроксимация $-d^2y/dx^2$. В силу предположений (2) - (4) для всех k и всех сеточных функций справедливы следующие оценки:

$$(A_k y - A_k z, y - z) \geqslant a_0 g_0 (R(y - z), y - z),$$

$$(A_k y - A_k z, w) \leqslant a_1 g_1 (R(y - z), y - z)^{\frac{1}{2}} (Rw, w)^{\frac{1}{2}}.$$

Для решения уравнения (5) на фиксированном временном слое k применяется итерационный метод:

$$(d_1 I + R)\frac{u^s - u^{s-1}}{\rho} + (d_1 I + A_k)u^{s-1} = f^k - \sum_{j=1}^{k-1} (d_{j+1} - d_j) y^{k-j},$$

где $\rho > 0$ - итерационный параметр, I - единичная матрица. Итерационный метод сходится со скоростью, не зависящей от параметров сетки. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические выводы.