Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О корректной разрешимости одного интегродифференциального уравнения, возникающего в теории вязкоупругости

Научный руководитель – Власов Виктор Валентинович

Тихонов Юрий Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия
E-mail: mihelson1994@yandex.ru

В данной работе изучаются вопросы, связанные с корректной разрешимостью абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными некоммутирующими операторными коэффициентам в гильбертовом пространстве. Рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + \alpha A u(t) - B^*\rho(t) + \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = f(t), \\ \dot{\rho}(t) + Bu(t) = 0, \ t > 0 \\ u(+0) = \varphi_0, \ \rho(+0) = \psi_0; \end{cases} \tag{1}$$

где функции $u(t)$ и $\rho(t)$ принимают значения в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H; A – положительно определённый самосопряжённый оператор, имеющий компактный обратный; оператор B – замкнутый, A-компактный в смысле Като; α – коэффициент внутреннего трения Кельвина-Фойгта. Ядро вольтерровой свёртки задаётся рядом:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \tag{2}$$

сходящимся в нуле

Уравнения вида 1 являются абстрактными моделями интегродифференциальных уравнений, описывающих вязкоупругие баротропные жидкости. Исследованию интегродифференциальных уравнений, имеющих аналогичный вид при $\alpha = 0$ и $K(t)$, являющимся конечной суммой экспонент, посвящены работы [1]. В этих работах установлена классическая разрешимость 1, экспоненциальное убывание решений и их асимптотика при некоторых дополнительных предположениях на правую часть.

Отметим, если формально продифференцировать первое равенство в 1 и подставить $\dot{\rho}(t)$ из второго уравнения получим уравнение второго порядка:

$$\ddot{u}(t) + \alpha A\dot{u}(t) + B^*Bu(t) + Au(t) - \int_0^t \dot{K}(t-s)Au(s)ds = g(t), \tag{3}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \ \dot{u}(+0) = \varphi_1; \tag{4}$$

которое является абстрактной моделью одномерных малых колебаний вязкоупругого стержня. Результаты о корректной разрешимости интегродифференциального уравнения в пространствах Соболева с весом подробно описаны в монографии [2]. Спектральный анализ оператор-функции, являющейся символом уравнения 3, в правой полуплоскости проведён в работе [3], а в статье [4] для этой оператор-функции получена локализация собственных чисел положительного, нейтрального и отрицательного типов, когда $K(t) = 0$.

Главный результат данной работы состоит в установлении классической разрешимости уравнения 1 при $\alpha > 0$ и $K(t)$, представимого в виде ряда из экспонент, а также экспоненциальной устойчивости этих решений.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_0 \in Dom(A^{1/2})$, $\psi_0 \in Dom(B^*)$, $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$ *тогда существуют и единственные функции* $u(t), \rho(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, *удовлетворяющие* 1.

Если, кроме того, B^*B *положительно определён, то существуют* ω, c , c_0, $c_1 > 0$, *что справедлива оценка:*

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}_+,H)} + \|\rho\|_{C(\mathbb{R}_+,H)} \leq e^{-\omega t}(c\,\|f\|_{C(\mathbb{R}_+,H)} + c_0\,\|\varphi_0\|_H + c_1\,\|\psi\|_H).$$

Список литературы

[1] Д. А. Закора, «Модель сжимаемой жидкости Максвелла», *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **63**, № 2, Российский университет дружбы народов, М., 2017,

[2] Власов В.В., Раутиан Н.А., «Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений». – М.: МАКС Пресс, 2016. – 488 с.

[3] А. И. Милославский, «О спектре неустойчивости операторного пучка», *Матем. заметки*, **49**:4 (1991)

[4] А. А. Шкаликов, Р. О. Гринив,«О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением», *Матем. заметки*, **56**:2 (1994)