Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов тригонометрического многочлена

Научный руководитель – Лукашенко Тарас Павлович

Фадеева Анна Вадимовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: AnnaFadeeva16@mail.ru

На практике передаваемые сигналы могут искажаться. Чтобы распознать переданный сигнал используют переполненные системы функций, в частности фреймы Парсеваля. Рассмотрим задачу существования фреймов и ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена.

Известно, что в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$ с $Q = ([-n, -m] \cup [m, n]) \cap \mathbb{Z}$ и $M = [m, n] \cap \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$ не существует ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена. В этих пространствах существуют фреймы Парсеваля из $(2n+1)$ последовательного сдвига одного многочлена. При больших значениях n размерность фрейма Парсеваля может во много раз превосходить размерность пространства многочленов, равную $2(n-m+1)$.

В связи с этим возник вопрос о существовании в таких пространствах $\mathbb{T}_Q$ фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции из меньшего числа элементов.

Будет доказан критерий существования фрейма Парсеваля наперед заданной размерности, полученного последовательными сдвигами одного многочлена в пространстве тригонометрических многочленов вида $T_Q(x) = \sum\limits_{k \in Q} c_k e^{ikx}$, где $c_k \in \mathbb{C}$, а Q — конечное множество целых чисел:

Теорема: Рассмотрим многочлен $T(x) = \sum\limits_{k \in Q} c_k e^{ikx}$, где Q — множество целых чисел, количество элементов в котором удовлетворяет оценке $1 < |Q| < \infty$. Пусть r — натуральное число. Система $\{T(x - \alpha j)\}_{j=0}^{r}$, полученная последовательными сдвигами многочлена $T(x)$ на α, образует фрейм Парсеваля в пространстве $\mathbb{T}_Q$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\alpha = \frac{2\pi v}{\mu \cdot (r+1)}$, μ — НОД (наибольший общий делитель) чисел из множества $\{a - b : a, b \in Q,\ a \neq b\}$, $v \in \mathbb{Z}$;

2) $|c_k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r+1)}}$, $k \in Q$;

3) для любых $a, b \in Q$, $a \neq b$, выполнено $(a - b) \cdot \alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Источники и литература

1) *Лукашенко Т.П.* Базисы тригонометрических многочленов из сдвигов ядер Дирихле // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2014. № 5. 35-40.

2) *Лукашенко Т.П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. **Т. 14**, вып. 4, часть 1. 367-373.

3) *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск, НИЦ РХД, 2001.

4) Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005.