Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Инвариантное относительно сдвигов пространство представления канонических коммутационных соотношений для бесконечномерных гамильтоновых систем

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Сорокина Анастасия Александровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: stanyslavstas@mail.ru

В докладе приводятся предложенное недавно О.Г. Смоляновым и Н.Н. Шамаровым [4, 5] определение функционального пространства, упомянутого в названии, и схема доказательства его сепарабельности; в таком пространстве ими естественным образом (по Шрёдингеру) представлены бесконечномерные бозонные канонические коммутационные соотношения (ККС) [1], возникающие при квантовании бесконечномерных гамильтоновых систем [2, 3].

Пусть H вещественное бесконечномерное гильбертово пространство, и пусть $g^{\pi}(x) = e^{\frac{-\pi(x,x)_H}{2}}$ для любого $x \in H$.

Через P_L обозначим ортогональный проектор на замкнутое подпространство $L \subset H$.

Определим пространство $S^{\pi}_K(H) = \{(f \circ P_K) \cdot (g^{\pi} \circ P_{H \ominus K}) : f \in S(K, \mathbb{C})\}$, где $S(K, \mathbb{C})$ - пространство Шварца комплекснозначных быстроубывающих функций, а $H \ominus K$ - ортогональное дополнение к конечномерному подпространству K.

Лемма. Если $K_1 \subset K_2$, то $S^{\pi}_{K_1}(H) \subset S^{\pi}_{K_2}(H)$.

Следствие. $S^{\pi}_{K_1}(H) \cup S^{\pi}_{K_2}(H) \subset S^{\pi}_{K_1+K_2}(H)$.

Пусть $S^{\pi}(H) = \cup\{S^{\pi}_K(H) : K$ - подпространство, $dim\ K < \infty,\ K \subset H\}$.

Предыдущее следствие позволяет ввести на $S^{\pi}(H)$ скалярное произведение по правилу: если $F_1 = (f_1 \circ P_K) \cdot (g^{\pi} \circ P_{H\ominus K}) \in S^{\pi}_K(H)$ и $F_2 = (f_2 \circ P_K) \cdot (g^{\pi} \circ P_{H\ominus K}) \in S^{\pi}_K(H)$, то $(F_1, F_2)_{L_2(H)} = \int_K f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$.

Определение. Под $L_2(H)$ будем понимать пополнение пространства $S^{\pi}(H)$ относительно введённого скалярного произведения.

Теорема.

1. (Инвариантность относительно сдвигов.) Для $F \in S^{\pi}(H)$ и $h \in H$ положим $(T_hF)(x) = F(x - h)$; тогда $T_hF \in S^{\pi}(H)$, и линейный оператор $T_h : S^{\pi}(H) \to S^{\pi}(H)$ продолжается до изометрии пространства $L_2(H)$.

2. Если H сепарабельно, то гильбертово пространство $L_2(H)$ сепарабельно.

Доказательство второго пункта теоремы сводится к применению теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Полученная сепарабельность позволяет утверждать, что упомянутое выше представление бозонных ККС является фоковским по Березину [1].

Автор благодарит своего научного руководителя О.Г. Смолянова за постановку задачи и внимание к работе Н. Н. Шамарова.

Источники и литература

1) Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — 2-е изд., доп. — М.: Наука, 1986.

2) Козлов В.В. Смолянов О.Г. Гамильтонов подход к вторичному квантованию//Доклады Академии наук М.:Наука, 2018.
3) Ратью Т.С., Смолянов О.Г. Квантование по Вигнеру систем Гамильтона–Дирака//Доклады Академии наук том 460, №5. с. 525-528. М.: Наука, 2015.
4) Smolyanov O.G. Shamarov N.N. Hamiltonian Weyl Second Quantization and Roots of Measures//report at an International Scientific Conference «Related Problems of Continuum Mechanics». Kutaisi, Georgia. 12-13 October 2018.
5) Shamarov N.N. Weyl second quantization//Abstracts of Talks. International Scientific Conference «Infinite–Dimensional Analysis and Mathematical Physics». p. 40. Moscow. 2019.