Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Массивные множества Хелсона

Научный руководитель – Лебедев Владимир Владимирович

Янина Анастасия Владимировна
Студент (бакалавр)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: yanina.stv@yandex.ru

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – окружность, $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор (здесь $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел). Мы рассматриваем класс $A(\mathbb{T}^n)$ непрерывных на $\mathbb{T}^n$ функций, ряды Фурье которых

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{i(k,t)}$$

сходятся абсолютно. Относительно естественной нормы

$$||f||_{A(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|$$

класс $A(\mathbb{T}^n)$ становится банаховым пространством и, более того, банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Пусть $E \subset \mathbb{T}^n$ – компактное множество. Рассмотрим $C(E)$ – банахово пространство непрерывных на E функций с равномерной нормой и $A(E)$ – класс функций, каждая из которых является сужением на E некоторой функции из $A(\mathbb{T}^n)$ с нормой

$$||g||_{A(E)} = \inf\{||f||_{A(\mathbb{T}^n)} : f|_E = g\}.$$

Компакт $E \subset \mathbb{T}^n$ называется множеством Хелсона, если $A(E) = C(E)$.

Хорошо известно, что множества Хелсона не могут содержать сколь угодно длинных арифметических прогрессий. В частности, из этого следует, что эти множества имеют нулевую меру Лебега и являются нигде не плотными в $\mathbb{T}^n$. Однако, как показал И. Вик, множества Хелсона на $\mathbb{T}$ могут быть как угодно массивны в смысле меры Хаусдорфа, а именно, из теоремы Вика [1] немедленно следует, что для произвольной неотрицательной непрерывной возрастающей функции $h(t)$, такой, что $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(t)}{t} = \infty$ на $\mathbb{T}$ существуют множества Хелсона положительной h-меры Хаусдорфа. И, в частности, множества Хелсона Хаусдорфовой размерности 1.

Вопрос о существовании массивных множеств Хелсона в $\mathbb{T}^n$ был поставлен В. В. Лебедевым. Этот вопрос не является тривиальным, поскольку массивное многомерное множество Хелсона не может быть получено, как декартово произведение массивных одномерных множеств Хелсона. Более того, несложно показать, что множество Хелсона в $\mathbb{T}^n$ при $n \geq 2$ не может содержать декартово произведение двух бесконечных множеств.

Автору удалось показать, что справедлива следующая

Теорема. *На $\mathbb{T}^n$ существует множество Хелсона, размерность Минковского которого равна n.*

Более того, полученный результат может быть улучшен. А именно, можно показать, что на $\mathbb{T}^n$ существует множество Хелсона E, такое, что мера его ε-окрестности убывает к нулю как угодно быстро.

Источники и литература

1) Wik I., Some examples of sets with linear independence, Arkiv for Matematik, Band 5 nr 12, 1963, 207-214.