

О значениях перманента квадратных $(0,1)$ -матриц

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Таранин Константин Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: colconstar@mail.ru

Пусть \mathbb{R} — поле действительных чисел, M_n — кольцо $n \times n$ матриц над этим полем, S_n — группа перестановок на множестве из n элементов. Подмножество множества M_n , содержащее все $(0,1)$ -матрицы, то есть матрицы, состоящие только из нулей и единиц, мы, вслед за [1], будем обозначать \mathfrak{A}_n .

Определение 1. Перманентом матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Нетрудно проверить, что при заданном n функция перманента на множестве \mathfrak{A}_n принимает целочисленные значения от 0 до $n!$, но при этом не все целые числа из этого отрезка являются значениями перманента. Например, наибольшее значение $n!$ достигается на матрице J_n , состоящей только из единиц, а при замене некоторой единицы нулём получается уже $n! - (n-1)!$, и при добавлении нулей в матрицу взамен других единиц перманент не увеличивается. В работе [1] была доказана следующая теорема о значениях, принимаемых подряд, начиная с 0.

Теорема 1. (*Brualdi, Newman, 1965, [1]*). Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого неотрицательного целого $j \leq 2^{n-1}$ существует матрица $A \in \mathfrak{A}_n$ такая, что $\text{per}(A) = j$.

Следуя той же работе, через $f(k)$ (при $k \in \mathbb{N}$) обозначим наименьший размер квадратных $(0,1)$ -матриц с перманентом, равным k . Тогда, согласно теореме 1, $f(k) \leq \lceil \log_2 k \rceil + 1$. В докладе будет представлен следующий результат.

Теорема 2. Если $k \geq 43$, то

$$f(k) \leq \lceil \log_2 \left(\frac{64}{85} k \right) \rceil.$$

Также будут представлены некоторые результаты и гипотезы относительно максимальных значений функции перманента на множествах $(0,1)$ -матриц заданного порядка с фиксированным количеством нулей.

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А.Э. Гутерману за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 17-11-01124.

Источники и литература

- 1) R.A. Brualdi, M. Newman, *Some theorems on permanent.* — J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. B **69B**, No. 3 (July–September 1965), 159–163.