Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Построение инерциального многообразия при нарушении условия щели в спектре

Научный руководитель – Горицкий Андрей Юрьевич

Дяченко Мария Игоревна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: mi.diachenko@gmail.com

Рассматривается неавтономное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = Au + F(u,t), \quad u \in H = \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где A — самосопряженный линейный оператор, а нелинейная функция $F(u,t)$, $F(0,t) \equiv 0$, удовлетворяет условию Липшица по пространственной переменной:

$$|F(u_1,t) - F(u_2,t)| \leq l(t) \cdot |u_1 - u_2|\,.$$

Предполагается, что спектр оператора A не пересекается с интервалом $(-1;1)$. В этом случае выполнено

$$(Ap,p) \geq |p|^2 \quad \forall p \in P(H), \qquad (Aq,q) \leq -|q|^2 \quad \forall q \in Q(H),$$

где P и Q — ортопроекторы, соответствующие положительным и отрицательным частям спектра оператора A.

Известно (см. [1]), что если $l(t) < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то для уравнения (1) существует так называемое инерциальное многообразие M, притягивающее к себе все решения уравнения (1) с экспоненциальной скоростью при $t \to +\infty$. При этом инерциальное многообразие является графиком липшиц-непрерывной функции $\Phi : P(H) \to Q(H)$

Целью настоящей работы является построение инерциального многообразия в случае, когда константа Липшица $l(t)$ нелинейной функции $F(u,t)$ принимает значения, сколь угодно большие 1, но на кратких промежутках времени.

Теорема. *Пусть функция $F(u,t)$ является 1-периодической,*

$$\begin{aligned} F(u,t) &= 0 && \text{при} \quad 0 < t < 1-\varepsilon, \\ |F(u_1,t) - F(u_2,t)| &\leq L|u_1 - u_2| && \text{при} \quad 1-\varepsilon < t < 1, \end{aligned}$$

при этом $\varepsilon \leq 0,1$. Пусть L удовлетворяет неравенству $L+1 < C/\varepsilon$, где C — некоторая константа, не превосходящая $0,35$. Тогда для уравнения (1) существует инерциальное многообразие M.

Для доказательства рассматривается дискретная динамическая система, связанная с оператором монодромии S, $Su(0) = u(1)$. Экспоненциально притягивающее инерциальное многообразие строится именно для этой динамической системы.

Источники и литература

1) Горицкий А. Ю., Чепыжов В. В. Свойство дихотомии решений квазилинейных уравнений в задачах об инерциальных многообразиях // Мат. Сб. 2005. Т. 196, № 4, С. 23–50.